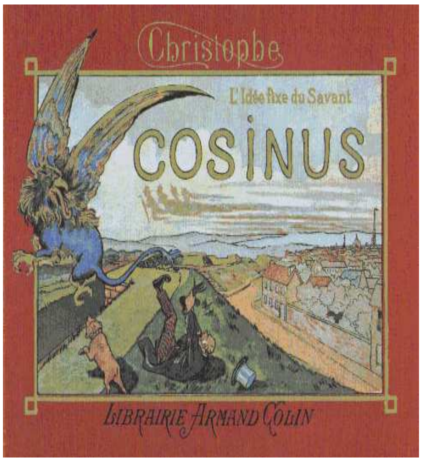
Chapitre 8

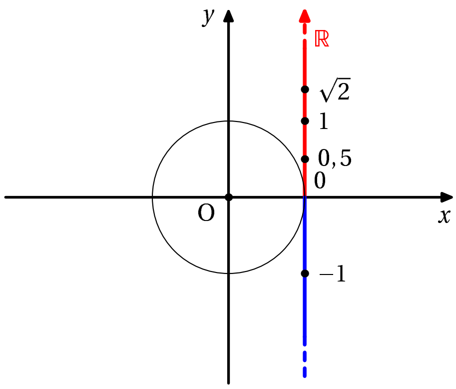
TRIGONOMÉTRIE

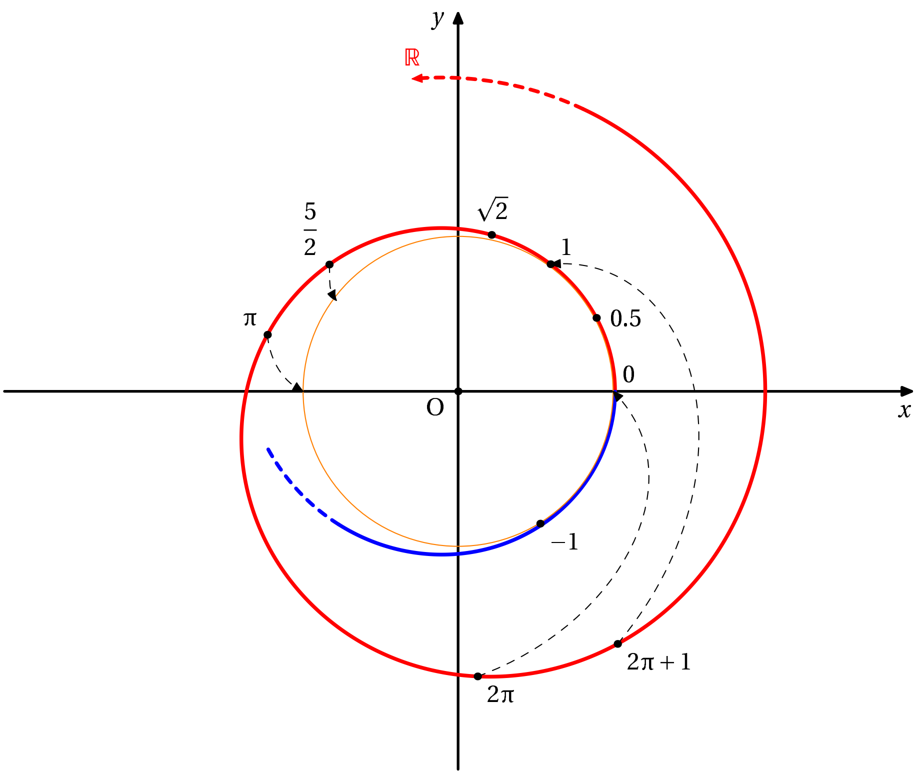


I - Promenons-nous sur le cercle

a. Enroulons la droite des réels

Pour aller se promener, il est peu pratique d'emmener la droite des réels telle quelle : elle prend trop de place. C'est pourquoi nous allons l'enrouler autour d'un cercle, mais comment faire ?
On considère un cercle de rayon 1 et de centre le centre du repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. On « colle » l'origine de la droite des réels sur le point I de coordonnées $(1;0)$, et on enroule. Enfin, on imagine, car il va être difficile de trouver le « bout » de la droite correspondant à $-\infty$...Sans compter qu'il va nous falloir pas mal de temps avant d'avoir fini de l'enrouler, mais ceci est un autre problème...





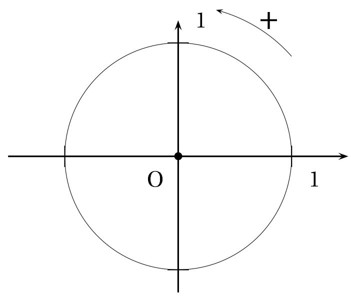
Comme vous le savez bien, le périmètre du cercle unité vaut $2 \times \pi \times \text{rayon} = 2\pi$ puisque le rayon vaut 1.

Donc, le point d'abscisse 2π de la droite des réels vient se « coller » sur 0, le point d'abscisse $2\pi+1$ de la droite des réels vient se « coller » sur 1 et plus généralement, tout point d'abscisse x voit se coller sur lui $x+2\pi$, $x-2\pi$, $x+2\times 2\pi$, $x+3\times 2\pi$, ...
Nous pouvons de plus observer que nous allons ainsi associer à chaque élément de la droite des réels, donc à chaque nombre réel x, un unique point sur le cercle.

b. Cercle trigonométrique

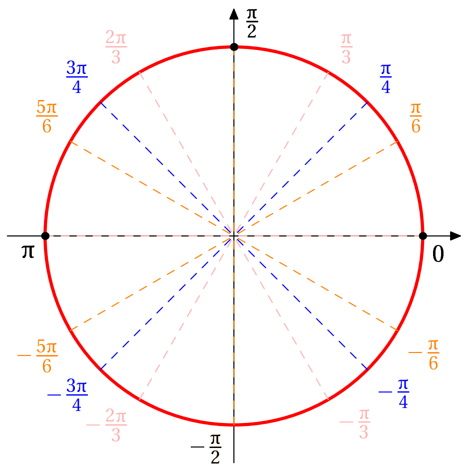
Définition 1 : Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O, de rayon 1, muni d'une orientation. Le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



c. La galette des Rois

Sachant qu'un « tour » correspond à 2π, on peut facilement savoir à quels points du cercle trigonométrique correspondent les fractions de π

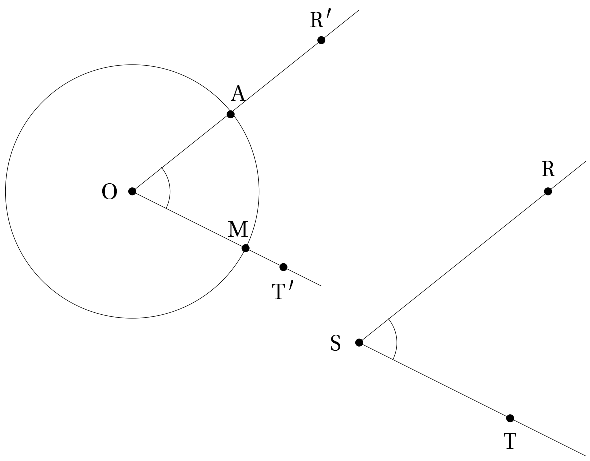


Bien sûr, on pourrait placer les points correspondant à n'importe quel réel, mais c'est un peu moins pratique [a].

a. Essayez donc de couper une galette des Rois en $\sqrt{2}$ parts...

d. Le radian

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique (de rayon 1).
Soit $\widehat{RST}$ un angle géométrique ; on effectue la translation de vecteur $\overrightarrow{SO}$ de cet angle : on obtient l'angle $\widehat{R'OT'}$, qui est de même mesure que $\widehat{RST}$.
Soient A et M les points d'intersection respectifs des demi-droites $[OR')$ et $[OT')$ avec le cercle $\mathscr{C}$. On a alors $\widehat{RST} = \widehat{R'OT'} = \widehat{AOM}$



Définition 2 : Radian

La mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{RST}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{AM}$

Demandez aux latinistes l'étymologie du mot *radian*...

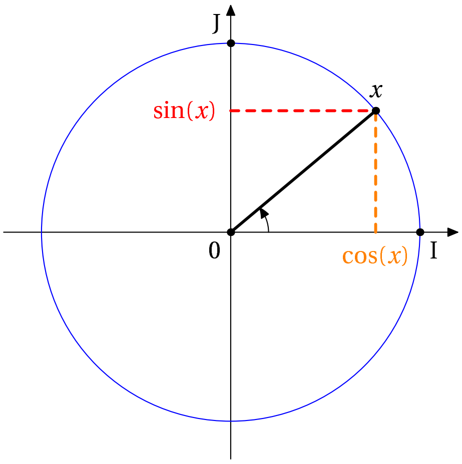
Correspondance entre degrés et radians

Il y a proportionnalité entre la mesure des angles en degrés et mesure en radians ; il faut juste retenir que 180 degrés correspondent à π radians et on retrouve alors facilement que le coefficient de proportionnalité vaut...

Mesure en degrés	180	30	45	60	90	360
Mesure en radians	π	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	2π

II - Sinus et cosinus

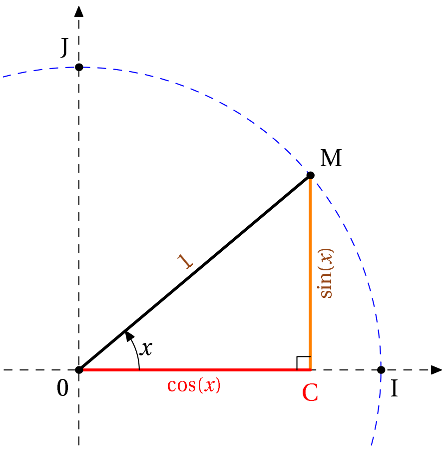
a. Définitions



Nous venons de voir qu'il est simple de repérer des points associés à des sous-multiples de π, moins pour les autres.
Pour y remédier, nous allons revenir à notre bon vieux système d'abscisses et d'ordonnées.
Pour les désigner, nous allons choisir des petits noms qui sonnent bien, par exemple...*sinus* et *cosinus*! Ces noms vous disent-ils quelque chose? Pourtant au collège, vous n'aviez pas du tout parlé de radian, de droite des réels qui tourne autour d'un cercle et autres complications.
On pourra utilement se reporter à l'exercice 1 page 9 pour avoir les *vraies* définitions des *lignes trigonométriques* d'un angle aigu.

Définition 3 : Cosinus et sinus

Quelque soit le réel x, on appelle cosinus et sinus du réel x l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle trigonométrique associé à x.
On les note $\cos(x)$ et $\sin(x)$.



Y aurait-il malgré tout un lien? Mmmmm... regardons la figure précédente de plus près...
Pour des valeurs de x comprises entre 0 et $\pi/2$, on retrouve le *soca* du *socatoa* vu au collège, donc au moins il n'y a pas de contradiction avec ce qui a été vu dans le passé.
Nous avons même vu (cf exercice 2 page 10) comment calculer géométriquement les lignes trigonométriques de quelques valeurs particulières.

Ce petit dessin nous permet en plus de vérifier certaines propriétés importantes. Par exemple :

Propriété 1 : Première formule de trigonométrie

Pour tout réel x

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Remarque 1 : notation

On utilise souvent la notation $\cos^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$ et de même pour le sinus.

On peut encore remarquer que
On remarquera également que les réels x et $x + 2\pi$ sont associés au même point, donc ont le même cosinus et le même sinus.
Retenez les valeurs particulières suivantes

Propriété 2 :

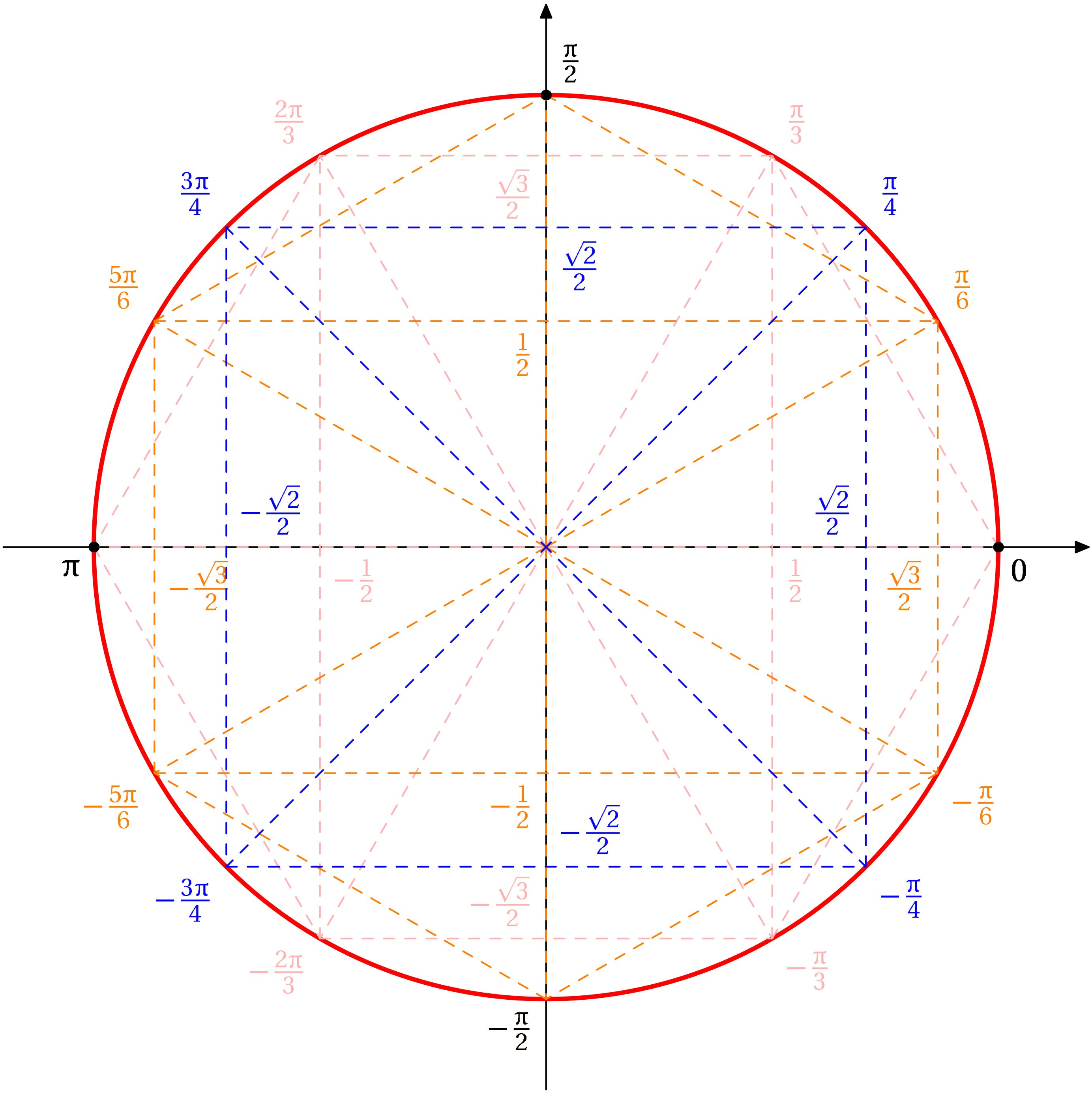
Pour tout réel x,

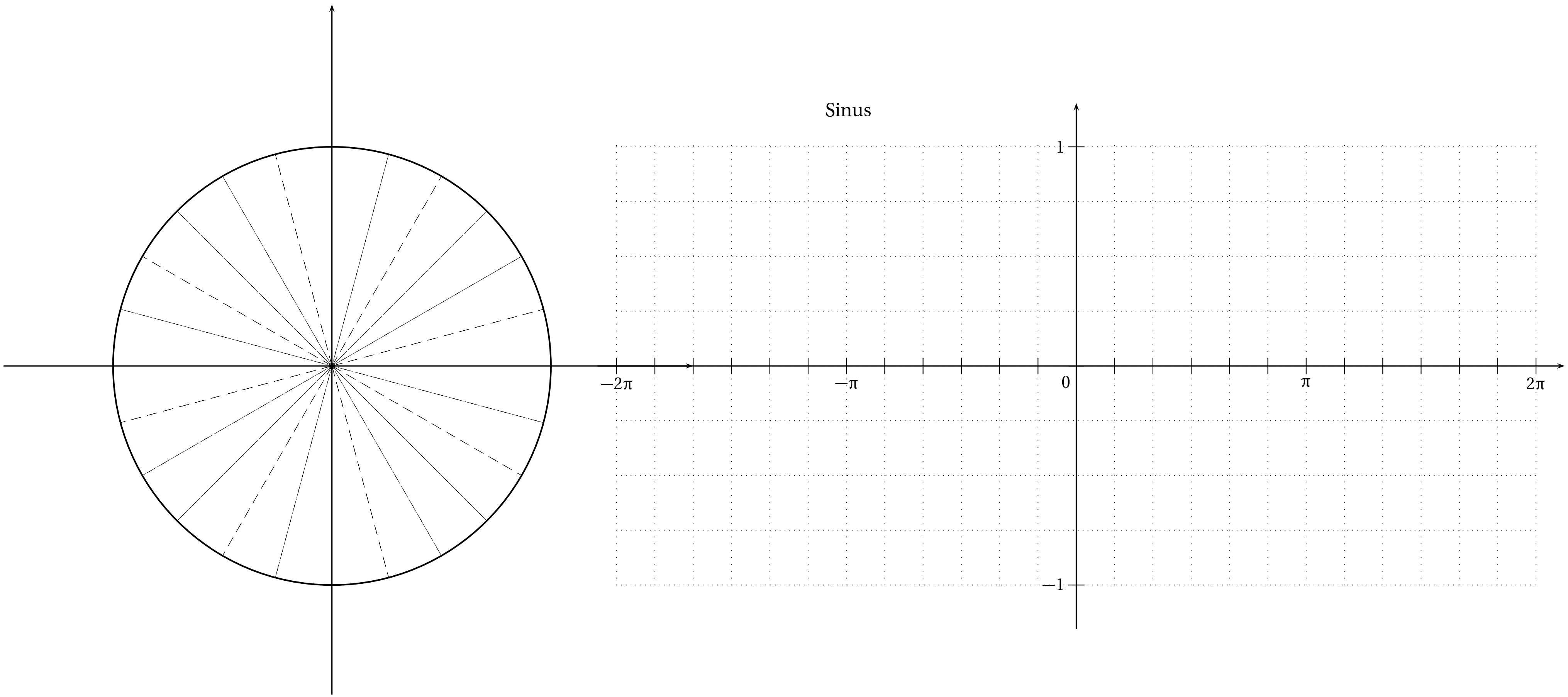
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

Propriété 3 : Périodicité

Pour tout réel x,

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$




Sinus
1
−1
−2π
−π
0
π
2π

b. Fonctions sinus et cosinus

Nous venons de voir qu'à chaque réel x, nous pouvons associer une unique valeur de $\cos x$ et $\sin x$. Nous allons donc pouvoir définir deux *fonctions* cosinus et sinus

Définition 4 : Fonctions cosinus et sinus

$$\cos : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1\,;1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \qquad \sin : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1\,;1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

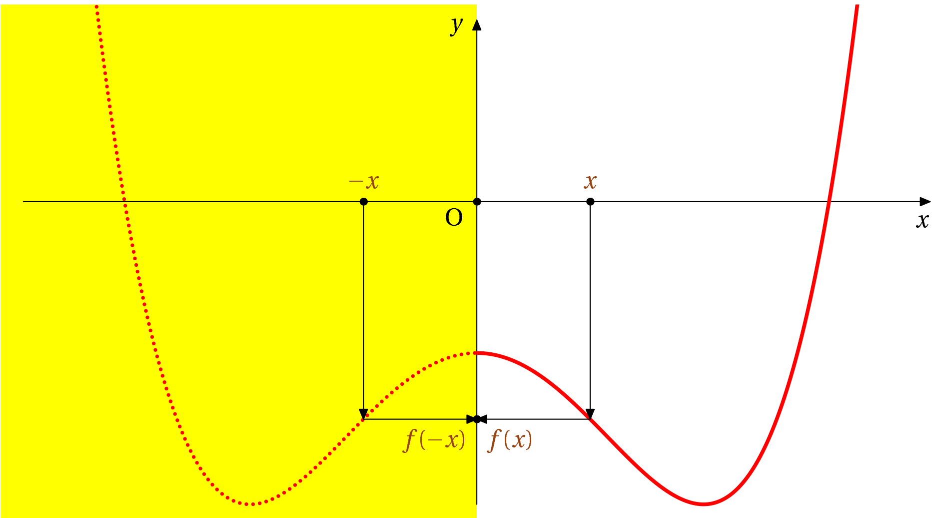
c. Parité

Définition 5 : Fonction paire

Dire qu'une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ est PAIRE signifie que :

Pour tout nombre x appartenant à $\mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$

Dans ce cas, la courbe représentative de f dans un repère *orthogonal* est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

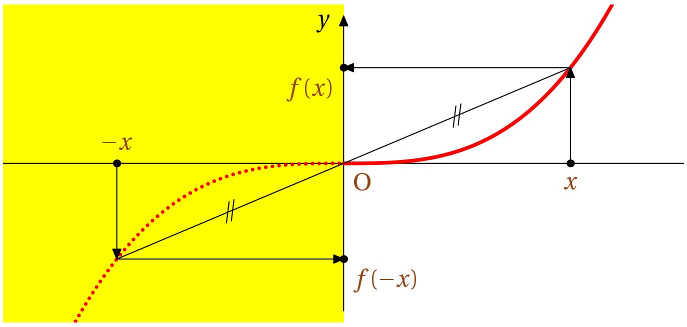


Définition 6 : Fonction impaire

Dire qu'une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ est IMPAIRE signifie que :

Pour tout nombre x appartenant à $\mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$

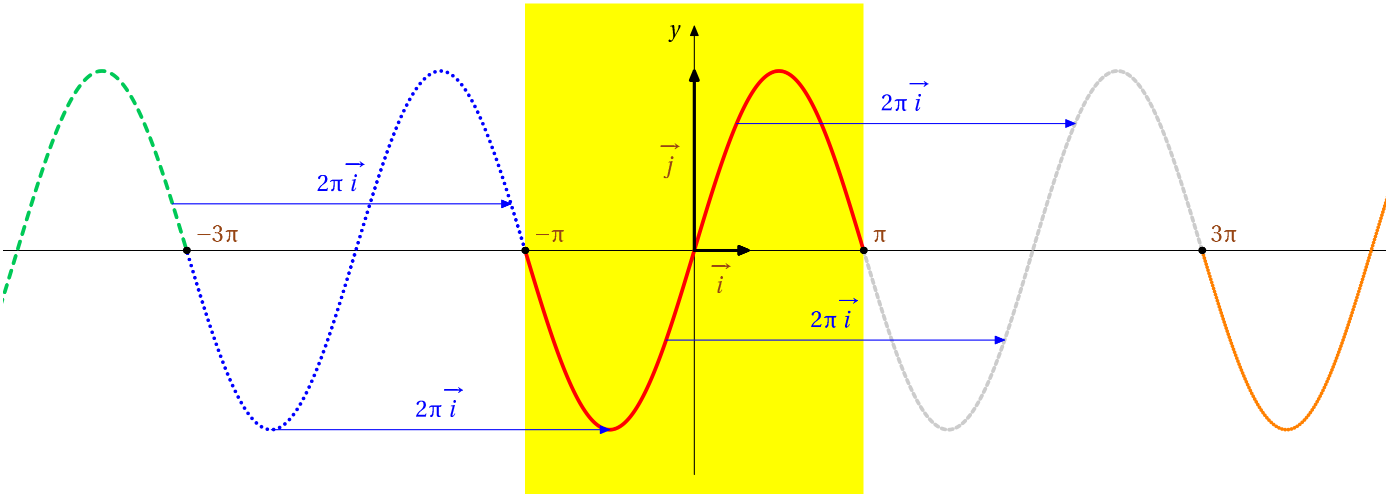
Dans ce cas, la courbe représentative de f dans un repère *orthogonal* est symétrique par rapport à l'origine



Nous avons vu à l'exercice 3 page 10 que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire.

d. Périodicité

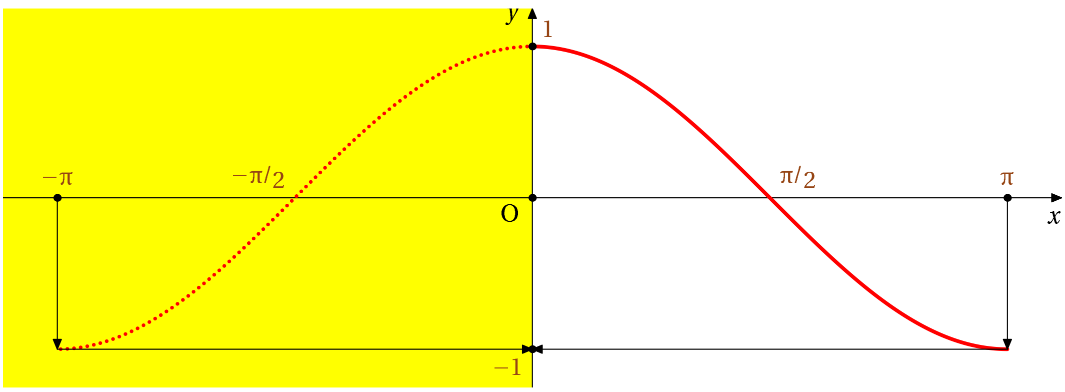
Vous avez bien sûr remarqué que $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ pour tout réel x.
Cela se comprend à la fois sur le cercle trigonométrique du fait de l'enroulement (cf a. page 1) et sur la représentation graphique des fonctions :



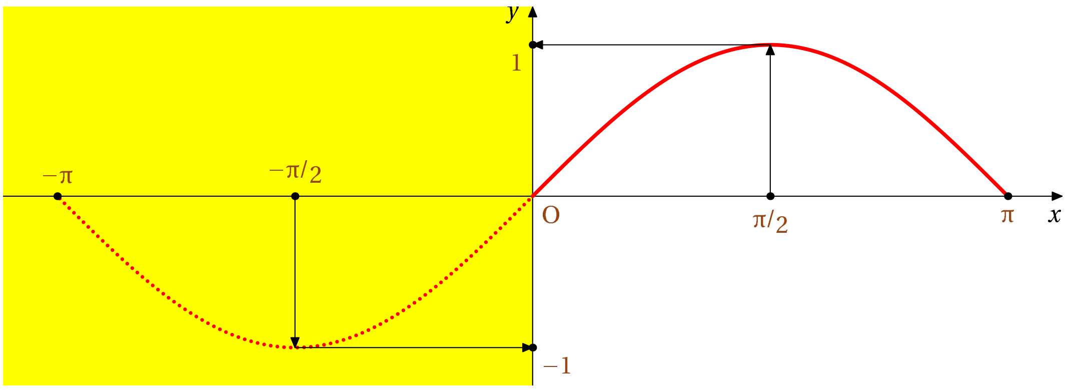
e. Variations

Nous retiendrons les résultats suivants :

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
Variations de $\cos(x)$	-1	0	1	0	-1



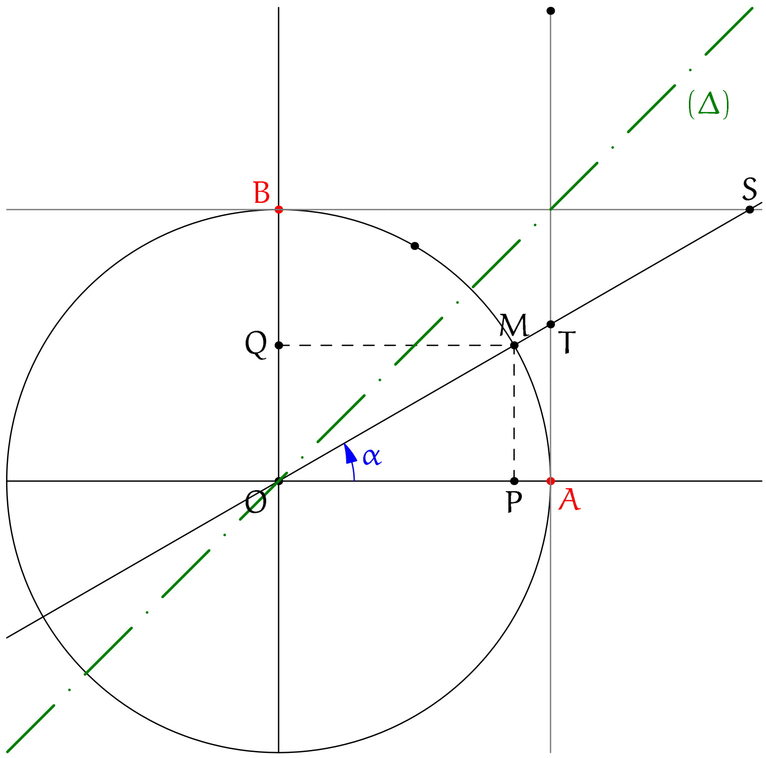
x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
Variations de $\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



III - Exercices

Exercice 1 Lignes trigonométriques

Dans un repère orthonormé, on a tracé un cercle de rayon 1,l'origine O du repère, le point A de coordonéées $(1;0)$, le point B de coordonnées $(0;1)$, un point M quelconque de cercle et quelques points associés à M :



On définit quelques fonctions de la variable α :

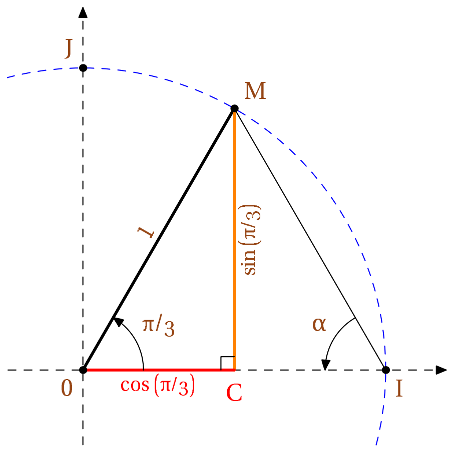
- la sécante de l'angle α : $\sec(\alpha) = \dfrac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OA}}$;
- la tangente de l'angle α : $\tan(\alpha) = \dfrac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}}$;
- le sinus de l'angle α : $\sin(\alpha) = \dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OA}}$;

– on appelle cosécante, cotangente, cosinus de l'angle α et on note $\operatorname{cosec}(\alpha)$, $\operatorname{cotan}(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ respectivement la sécante, la tangente et le sinus du *complémentaire* de l'angle α.

1. a) Que pouvez-vous dire à propos de la droite (Δ) ?
   b) Construisez les symétriques des points M, P, A, O et S par rapport à (Δ).
   c) On note β l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}\right)$: quel rapport existe entre α et β ?
2. Montrez que $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\sin(\alpha)}$.
3. Montrez que $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
4. Montrez que $\operatorname{cotan}(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$.
5. Montrez que $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sec(\alpha)}$.
6. Exprimez simplement $\sin(\alpha) \times \sec(\alpha)$ et $\cos(\alpha) \times \operatorname{cosec}(\alpha)$.

Exercice 2 Valeurs particulières

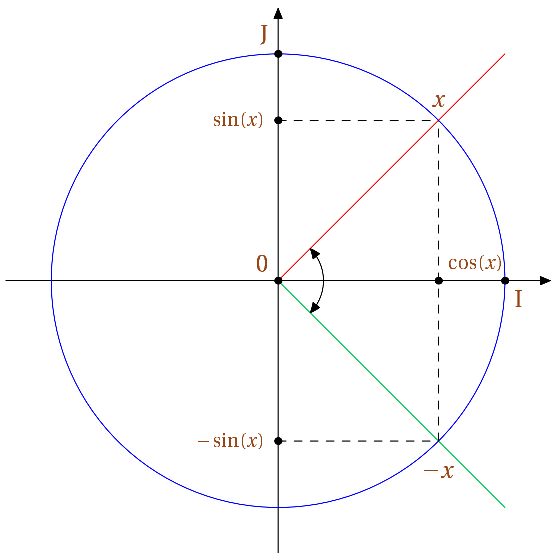
On veut calculer les lignes trigonométriques de $\pi/3$. Pour cela, on considére le point M du cercle trigonométrique correspondant au réel $\pi/3$ et le point C tel que $OC = \cos(\pi/3)$.



1. Quelle est la nature du triangle OMI ?
2. Déduisez-en α.
3. Montrez alors que OMI est en fait un triangle équilatéral.
4. Que représente le segment [C, M] pour le triangle OMI ?
5. Déduisez-en $\cos(\pi/3)$ puis $\sin(\pi/3)$.
6. Imaginez maintenant un moyen de calculer les lignes trigonométriques de $\pi/6$ et de $\pi/4$.

Exercice 3 Parité des fonctions sinus et cosinus

Que vous inspire ce dessin :



Exercice 4 Équation trigonométrique

1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation

(E) $$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

Exercice 5 Équation trigonométrique

1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation

(E) $$\sin x = -\frac{1}{2}$$

2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[0;2\pi]$

Exercice 6 Déterminer une coordonnée manquante

1. Soit x un nombre réel de l'intervalle $[0;\pi]$ tel que
$$\cos x = \frac{3}{5}$$
Déterminer la valeur exacte de $\sin x$
2. Même question, mais x est maintenant un nombre réel de l'intervalle $[-\pi;0]$.

Exercice 7 Périodicité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$.

1. Prouver que f est paire.
2. Prouver que f est périodique, de période π.

Exercice 8 Périodicité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \cos x$.

1. Prouver que f est impaire.
2. Prouver que f est périodique, de période π.

Exercice 9 Établir une formule de trigonométrie

Montrer que l'égalité ci-dessous est vraie pour tout réel x :

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$

Exercice 10 Déterminer une coordonnée manquante – Utilisation des symétries

1. Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, démontrer que
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$
2. En déduire que
$$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$$
3. En déduire les sinus et cosinus de
$$a = \frac{11\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{23\pi}{12}$$

Exercice 11 Application d'une formule de trigonométrie

Dans cet exercice, on admet que l'on a, pour tout réel x,

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

et l'on va utiliser cette formule pour déterminer quelques sinus et cosinus « exotiques ».

1. On donne
$$\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{avec} \qquad x \in \mathrm{I} = \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$
   a) Calculer $\sin x$.
   b) En déduire $\sin 2x$.
   c) Déterminer un encadrement de $2x$ lorsque x est dans l'intervalle I.
   d) Déduire des questions précédentes que $x = \frac{\pi}{8}$.
2. On donne
$$\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{avec} \qquad x \in \mathrm{I} = \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$
   a) Calculer $\sin 2x$ en procédant comme précédemment.
   b) En déduire x.

Exercice 12 Établir une formule de trigonométrie

Montrer que l'égalité ci-dessous est vraie pour tout réel x :
$$(1+\sin x+\cos x)^2 = 2(1+\cos x)(1+\sin x).$$

Exercice 13 Transformations radian ↔ degré

1. Convertir en radians les mesures suivantes données en degrés :
$$10, \quad 53, \quad 180, \quad 60, \quad 18.$$
2. Convertir en degrés les mesures suivantes données en radians :
$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{8}.$$

Exercice 14 Longueurs d'arcs circulaires

Sur un cercle de rayon 10cm, calculer la longueur de chacun des arcs de cercle interceptés par des angles au centre de mesure :

1. en radians :
$$a)\ \frac{\pi}{2} \qquad b)\ \frac{\pi}{3} \qquad c)\ \frac{2\pi}{3} \qquad d)\ \frac{3\pi}{4} \qquad e)\ 0{,}2.$$
2. en degrés :
$$a)\ 90 \qquad b)\ 120 \qquad c)\ 80.$$

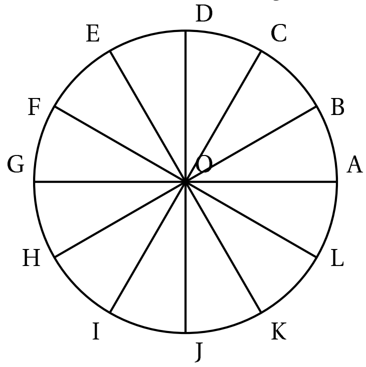
Exercice 15

Tracer un cercle trigonométrique.

1. En noir, placer dessus à l'aide du compas, les points correspondant au angle de mesure $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et π.
2. En rouge, placer les points de mesure $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.
3. En vert, placer les points de mesure $\frac{-\pi}{3}, \frac{11\pi}{4}, \frac{-13\pi}{6}$.

Exercice 16

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous :



1. Justifier que la mesure d'un secteur est de $\frac{\pi}{6}$ radian.
2. Parmi les égalités suivantes, indiquer celles qui sont vraies et corriger les autres.

a) $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{-\pi}{6}$

b) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{-3\pi}{2}$

c) $\left(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{4\pi}{3}$

d) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \frac{7\pi}{6}$

e) $\left(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OK}\right) = \frac{-2\pi}{3}$

f) $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OK}\right) = \frac{\pi}{2}$

g) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \frac{-5\pi}{6}$

Exercice 17

Soit $\mathscr{C}_0$ un cercle de centre A et B un point de ce cercle.

1. Construire les points C, D, E, et F du cercle $\mathscr{C}_0$ tels que :

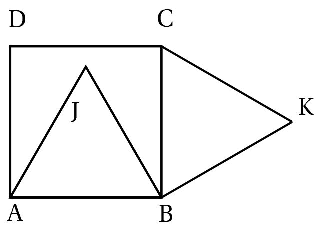
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{7\pi}{6} \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{-3\pi}{4}$$

2. Déterminer une mesure de chacun des angles suivants :

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}\right) \quad ; \quad \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}\right)$$

Exercice 18

ABCD est un carré. ABJ et CBK sont deux triangles équilatéraux tels que J est à l'intérieur du carré et K à l'extérieur.



Donner une mesure en radian de chacun des angles orientés suivants :

1. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}\right)$
2. $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right)$
3. $\left(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}\right)$
4. $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BJ}\right)$
5. $\left(\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JA}\right)$

Exercice 19

Plusieurs mesures pour un même angle, mesure principale.

1. Sur un cercle trigonométrique, placer les graduations multiples de $\frac{\pi}{6}$.
2. Placer le point M tel que l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ mesure $\frac{17\pi}{6}$ rad.
3. Quelle autre mesure, en radians, aurait-on pu donner pour cet angle ?
4. Donner encore quatre mesures différentes de cet angle (toujours en radians) :
   – deux positives.
   – deux négatives.
5. Combien existe-t-il de mesures différentes de cet angle ?
6. Parmi toutes les mesures possibles, donner celle qui correspond à l'arc le plus court. Cette mesure est dite *mesure principale* de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$.
7. Donner les mesures principales de chacun des angles suivants :

$$\frac{23\pi}{6} \quad ; \quad \frac{23\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-23\pi}{4} \quad ; \quad \frac{-23\pi}{2} \quad ; \quad \frac{15\pi}{4} \quad ; \quad \frac{-79\pi}{6} \quad ; \quad \frac{33\pi}{8} \quad ; \quad \frac{17\pi}{6}$$

Exercice 20

Représenter graphiquement, sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$, les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = |\cos(x)| \quad ; \quad g(x) = \sin(x) + |\sin(x)|$$

Exercice 21

Cosinus et sinus des angles associés.

1. a) Placer sur un cercle trigonométrique les points de mesures $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{3})$, $\cos(\frac{2\pi}{3})$, $\cos(\frac{4\pi}{3})$, $\sin(\frac{5\pi}{3})$, $\sin(\frac{2\pi}{3})$ et $\sin(\frac{4\pi}{3})$.
2. a) Placer sur un cercle trigonométrique les points de mesures $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.
   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{6})$, $\cos(\frac{-\pi}{6})$, $\cos(\frac{7\pi}{6})$, $\sin(\frac{5\pi}{6})$, $\sin(\frac{-\pi}{6})$ et $\sin(\frac{7\pi}{6})$.
3. a) Placer sur un cercle trigonométrique les points de mesures $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{3\pi}{4})$, $\cos(\frac{5\pi}{4})$, $\cos(\frac{7\pi}{4})$, $\sin(\frac{3\pi}{4})$, $\sin(\frac{5\pi}{4})$, $\sin(\frac{7\pi}{4})$, $\tan(\frac{3\pi}{4})$, $\tan(\frac{5\pi}{4})$ et $\tan(\frac{7\pi}{4})$.

Exercice 22

Simplifier le plus possible :

1. $A = \cos(-\pi) + \cos(-\frac{3\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{4})$
2. $B = \cos(0) + \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{3\pi}{4}) + \cos(\pi)$
3. $C = \sin(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{5\pi}{6}) + \sin(\pi)$

Exercice 23

On considère l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$

1. a) Dans un repère orthonormée, tracer un cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.
   b) En déduire les solutions de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
2. En s'inspirant de la démarche effectuée à la question précédente, résoudre, à l'aide d'un cercle trigonométrique chacune des équations suivantes :
   a) $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
   b) $\sin(x) = \frac{1}{2}$
   c) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   d) $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Exercice 24

Résoudre chacune des inéquations suivantes en utilisant un cercle trigonométrique :

1. $\sin(x) \geq 0$ pour $x \in [-2\pi;\pi]$
2. $\cos(x) \leq 0$ pour $x \in [\pi;2\pi]$
3. $\sin(x) < 0$ pour $x \in [-\pi;0]$
4. $\sin(x) > 0$ pour $x \in [0;3\pi]$

Exercice 25

On considère les intervalles :

$$I_1 =]-\pi;-\frac{\pi}{2}[\quad ; \quad I_2 =]-\frac{\pi}{2};0[\quad ; \quad I_3 =]0;\frac{\pi}{2}[\quad ; \quad I_4 =]\frac{\pi}{2};\pi[$$

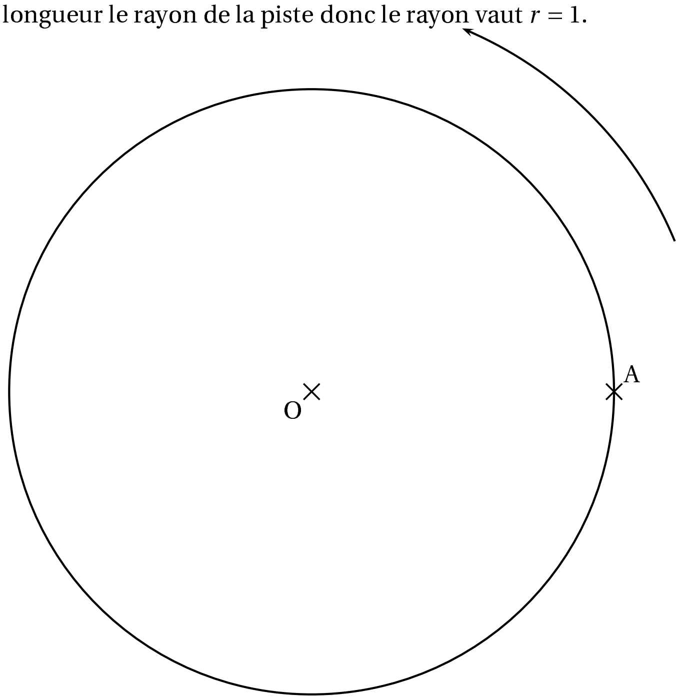
1. Sur un cercle trigonométrique, représenter par un arc de cercle chacun des intervalles définis ci-dessus.
2. Associer à chacun des systèmes ci-dessous un arc puis un intervalle.

$$\S_1 \begin{cases} \cos(x) > 0 \\ \sin(x) < 0 \end{cases} \quad \S_2 \begin{cases} \cos(x) > 0 \\ \sin(x) > 0 \end{cases} \quad \S_3 \begin{cases} \cos(x) < 0 \\ \sin(x) > 0 \end{cases} \quad \S_4 \begin{cases} \cos(x) < 0 \\ \sin(x) < 0 \end{cases}$$

IV - Module : Les radians

Exercice 26

Un vélodrome est une piste circulaire pour les coureurs cyclistes. On y circule en partant de A et dans le sens indiqué par la flèche. On choisit comme unité de longueur le rayon de la piste donc le rayon vaut $r = 1$.



1. Roger a parcouru la moitié de la piste ; il est arrivé en C :
   a) Placer C.
   b) Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$?
   c) A quelle mesure d'angle (en degrés) correspond ce parcours ?
2. Roger a parcouru les $\frac{3}{4}$ de la piste. Il est arrivé en D.
   a) Placer D.
   b) Quelle est la valeur exacte de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AD}$ correspondant à ce parcours ?
   c) A quelle mesure d'angle (en degrés) correspond ce parcours ?
3. Roger a parcouru un arc de longueur $\frac{\pi}{2}$.
   a) Placer son point d'arrivée B.
   b) A quelle mesure d'angle correspond ce parcours ?

Exercice 27 Graduations principales

Le but de cet exercice est de placer les mesures principales connues en radian. On placera les points sur un cercle identique au précédent.

1. a) Comment trace-t-on au compas la moitié d'un angle ?
   b) En remarquant que $\frac{\pi}{4}$ est la moitié de ......, placer sur le cercle le point M_4 de graduation $\frac{\pi}{4}$.
2. a) $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\dots}$ donc pour placer $\frac{\pi}{3}$, il suffit de partager le cercle en ... parties égales.
   b) Placer sur le cercle le point M_3 de graduation $\frac{\pi}{3}$.
3. En remarquant que $\frac{\pi}{6}$ est la moitié de ......, placer sur le cercle le point M_6 de graduation $\frac{\pi}{6}$.
4. En remarquant que $\frac{3\pi}{4} = 3 \times \frac{\pi}{4}$, placer la graduation $\frac{3\pi}{4}$.
5. Placer de même les graduations $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$.

Exercice 28 Angles orientés

1. Sur le cercle précédent, on a placé un point M_3 vérifiant $\widehat{OAM_3} = \frac{\pi}{3}$ rad.
   Sur ce même cercle, placer un point M_3', distinct de M_3 tel que $\widehat{OAM_3'} = \frac{\pi}{3}$ rad.

Définition 7 : Sens direct-Positif-Trigonométrique

On appelle *sens positif* ou *sens direct* ou *sens trigonométrique*, le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens giratoire).

Définition 8 : angle orientés

Pour distinguer les deux points M_3 et M_3' correspondants à un même angle géométrique, on utilisera les notations suivantes :

- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_3}\right)$ au lieu de $\widehat{OAM_3}$ et puisque pour passer de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OM_3}$, on a un angle de $\frac{\pi}{3}$ en tournant dans le sens trigonométrique, on écrira $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_3}\right) = +\frac{\pi}{3}$ rad,
- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_3'}\right)$ au lieu de $\widehat{OAM_3'}$ et puisque pour passer de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OM_3'}$, on a un angle de $-\frac{\pi}{3}$ en tournant dans le sens trigonométrique, on écrira $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_3'}\right) = -\frac{\pi}{3}$ rad,

Les angles $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_3}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_3'}\right)$ sont appelés *angles orientés*.

2. Placer sur le cercle précédent les points E, F, G et H tels que :
   a) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = \dfrac{-\pi}{4}$
   b) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{-\pi}{6}$
   c) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}\right) = \dfrac{-5\pi}{6}$
   d) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{-7\pi}{3}$

Merci

Je remercie Denis LE FUR, Aymar de SAINT SEINE et Philippe IVALDI