Activité de recherche n°1 - L'approximation de π d'Archimède - 2^{nde} 4

I Dodécagone

À partir de l'hexagone régulier ABCDEF inscrit dans le cercle de rayon 1 et de centre O que nous avons étudié précédemment, nous voudrions tracer un polygone inscrit à 12 côtés (dodécagone) pour avoir un peu plus de précision.

Commencez d'abord par zoomer sur le triangleAOB.

Le nouveau sommet A' du dodécagone est bien sûr sur le cercle et nous le choisissons tel que $A'A = A'B$: pourquoi ?

Que représente la droite (OA') pour le segment $[AB]$? Pourquoi ?

La droite (OA') coupe la droite $[AB]$ en I : que pouvez-vous dire sur I ?

Calculez les distances OI puis IA' puis AA' puis le périmètre du dodécagone.

Quelle nouvelle valeur approchée de π obtient-on ?

II Tétraicosagone

On double encore le nombre de côtés. Zoomez comme tout à l'heure sur le triangle OAA' et essayez de vous inspirer de la méthode que nous venons d'employer pour calculer le périmètre du tétraicosagone. On appellera J le milieu de $[AA']$.

III 96 côtés... et plus

a. Un vieux théorème

Reprenez la figure du dodécagone en traçant le cercle en entier et en rajoutant le point K, milieu de $[BA']$.

Notons A_d le point diamétralement opposé à A'.

Que pensez-vous des segments $[OK]$ et $[A_dB]$?

b. Un nouveau théorème

On considère un triangle TRI rectangle en R et H le pied de la hauteur issue de R.

Combien de triangles rectangles sont maintenant dessinés sur la figure ?

Appliquez le théorème de Pythagore à chacun de ces triangles.

On voudrait montrer que $TR^2 = TH \times TI$.

Dans une des trois équations écrites grâce au théorème de Pythagore, isolez TR^2 à gauche puis débrouillez-vous avec les deux autres équations pour n'avoir que des TH et des TI à droite.

Retournez vers notre cercle et essayez de montrer que $OJ = \sqrt{\dfrac{1+OI}{2}}$.

c. Un cerf-volant

Un cerf-volant, c'est un quadrilatère non croisé dont les diagonales sont perpendiculaires.

Soit $ABCD$ un cerf-volant. Calculez l'aire de $ABCD$ de deux manières différentes.

Revenez au cercle. Trouvez un cerf-volant caché dans la figure. Calculez son aire de deux manières différentes pour montrer que $AA' = \frac{AB}{2OJ}$.

d. Héritage

On suppose connus OI et AB : comment calculer OJ et AA' ?

En quoi cela peut nous aider à continuer à nous approcher du cercle ?

e. Un ordinateur

Tout ça nous demande beaucoup de calculs or un ordinateur sait calculer donc nous allons lui laisser faire la sale besogne. Le problème, c'est qu'un ordinateur est stupide : il faut lui expliquer précisément quels calculs il doit effectuer.

Appelons l'étape 0 le cas étudié avec l'hexagone, l'étape 1 le cas du dodécagone, l'étape 2 le cas du tetraicosagone, etc.

Nous venons de voir comment, connaissant les dimensions des côtés et la distance du centre au côté à une certaine étape, nous pouvons calculer les dimensions des côtés et la distance du centre au côté à l'étape suivante.

Appelons $c(n)$ la longueur du côté du polygone de l'étape n et $d(n)$ la distance de O à un côté du polygone de l'étape n.

Que valent $c(0)$ et $d(0)$?

Combien le polygone de l'étape n a-t-il de côtés ?

Calculez $d(n+1)$ en fonction de $d(n)$ puis $c(n+1)$ en fonction de $c(n)$ et de $d(n+1)$.

Voici à l'aide de OCAML un algorithme malin qui permet de calculer $d(n)$ à n'importe quelle étape n :

```
# let rec d(n)=
    if n=0 then 0.5*.sqrt(3.)
    else sqrt(0.5*.(1.+.d(n-1)));;
```

Comment dit-on carré en anglais ? Et racine ? À votre avis, à quoi correspond la commande `sqrt`.

À vous de trouver un programme pour calculer $c(n)$ puis pour donner une valeur approchée par défaut de π...

Pour mémoire, voici une petite approximation de π que vous apprendrez par cœur :

$\pi \approx$ 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460
9550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923
4603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113305305488204665213841469519415
1160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139
4946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901
2249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317328160
9631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956
2863882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301852
9689957736225994138912497217752834791315155748572424541506959508295331168617278558890750983817546374649393192550604009277016711390098