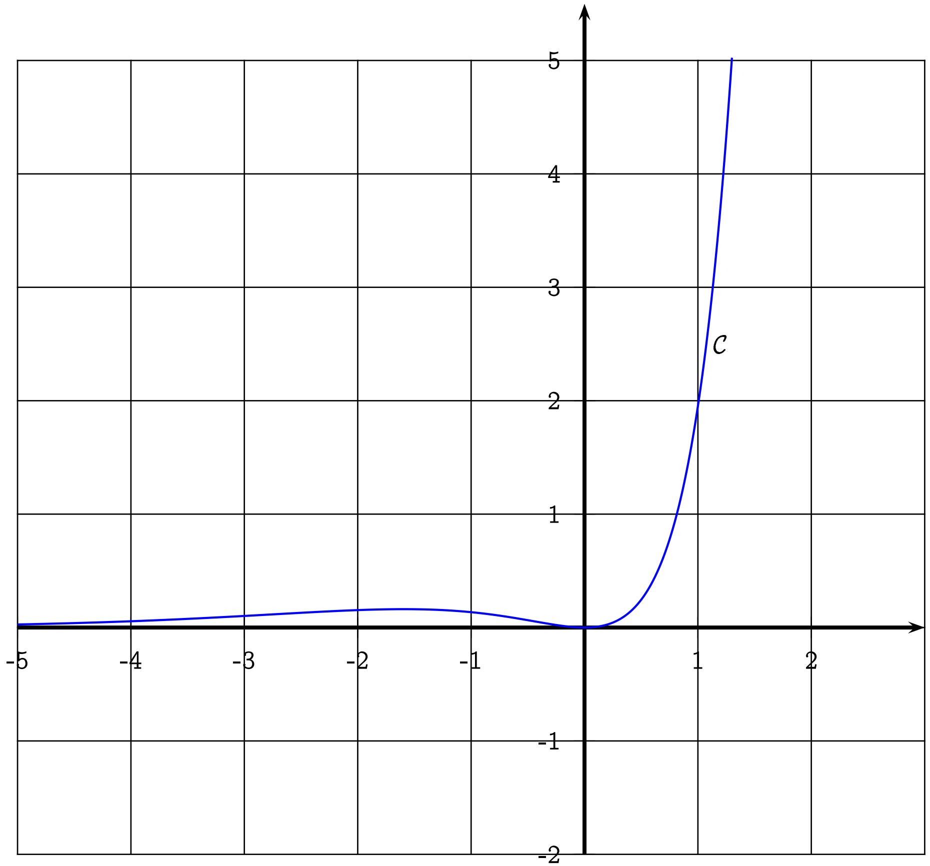
BTS domotique 1 - Développements limités - Épreuves d'examen

Exercice 1



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-contre.

1. a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = e^{x}(2e^{x} - 2 - x)$.

b) En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abcisse 0.
Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exercice 2

On rappelle que g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
On admet que le développement limite à l'ordre 3 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{e^{x}+1}$ au voisinage de 0 est :

$$\frac{1}{e^{x}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

(Ce résultat n'a pas à être démontré).

1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3 de la fonction g au voisinage de 0 est

$$g(x) = 2 + x - \frac{x^3}{12} + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de T et $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.

Exercice 3

Soit φ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$.
On désigne par C la courbe représentative de φ dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où on prend comme unités : 10 cm pour 0,01 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la fonction φ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est

$$\varphi(t) = 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

   b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de C et T au voisinage de ce point.
3. Tracer sur la copie la tangente T et la courbe C dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ défini au début de la partie *B*. On pourra se limiter à la partie de C correspondant à l'intervalle $[0\ ;\ 0,01]$.
4. a) Déterminer par le calcul le nombre réel positif α tel que $\varphi(\alpha) = 0,5$.
   Donner la valeur exacte de α, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

   b) Retrouver sur la figure le résultat obtenu au a) : faire apparaître les constructions utiles.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-\frac{t^2}{10^4}}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère onhogonal.

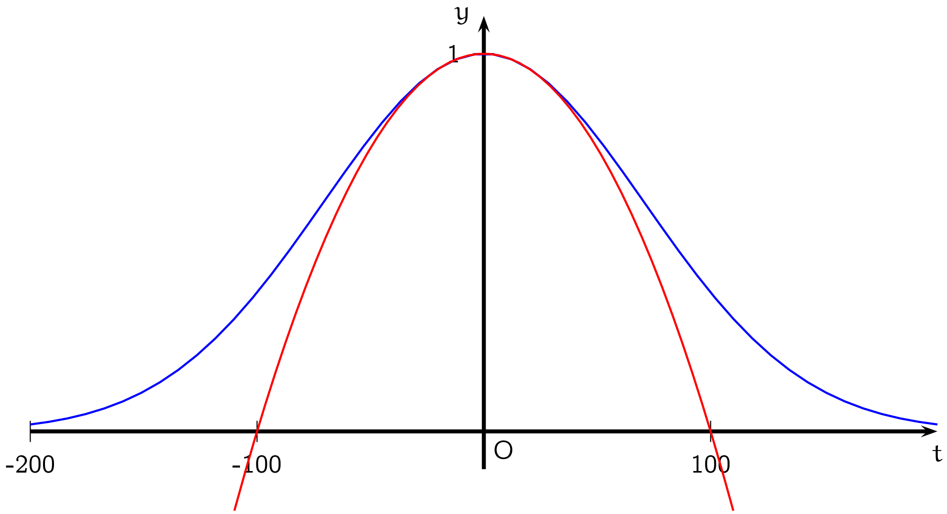
1. a) Déterminer $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

   b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus au a.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   Un logiciel de calcul formel donne l'expression de $f'(t)$:
   pour tout t de $\mathbb{R}$, $f'(t) = -\frac{2t}{10^4}e^{-\frac{t^2}{10^4}}$.
   Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(t) \geqslant 0$.

   b) En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. a) À l'aide du développement limité, à l'ordre 1, au voisinage de 0, de la fonction $u \longmapsto e^u$, calculer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f.

   b) Sur la figure ci-après sont tracées la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe représentative Γ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 1 - \frac{t^2}{10^4}$.
   Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au B. 3. a.

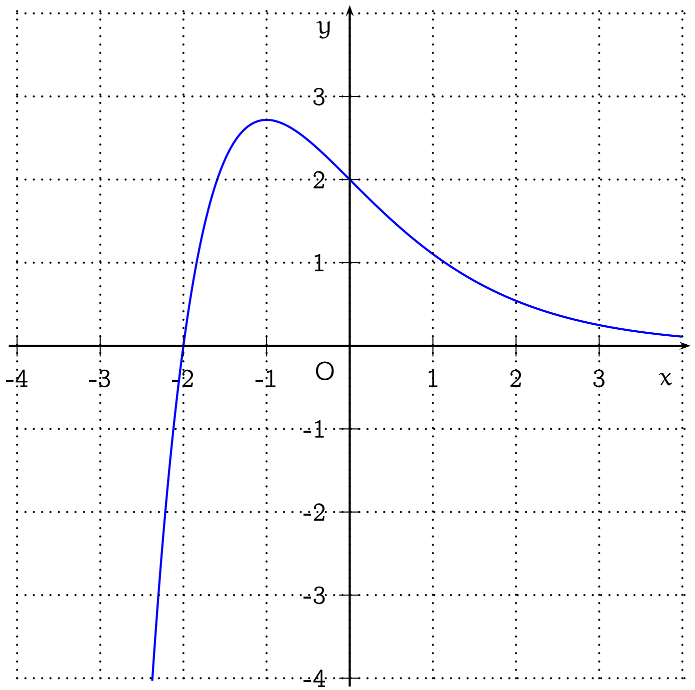


4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{30} \left(1 - \frac{t^2}{10^4}\right)\,dt = 29,1$.

Exercice 5

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$



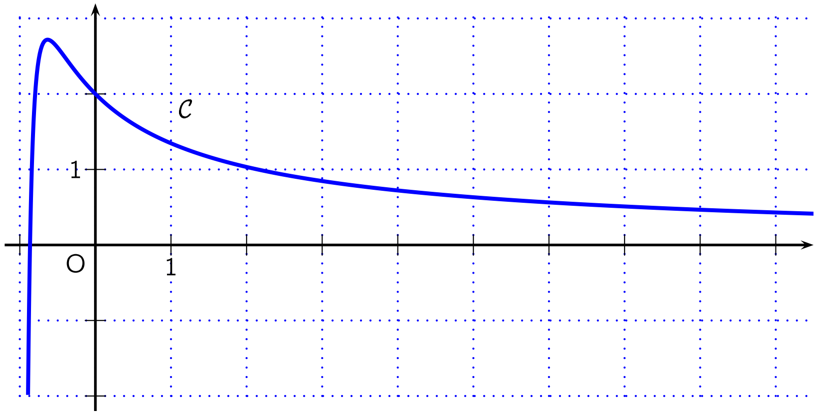
1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. Déduire du **1** une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. a) Démontrer que, pour tout x de $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$
   b) Résoudre dans $]-1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1\ ;\ +\infty[$.
   c) Établir le tableau de variation de f.
3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

   a) En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de leur point d'abscisse 0.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 0,4xe^{-0,2x^2}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les unités graphiques étant de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. a) Démontrer que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$,

   $$f'(x) = 0,4\left(1 - \sqrt{0,4}\ x\right)\left(1 + \sqrt{0,4}\ x\right)e^{-0,2x^2}$$

   b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   c) Donner le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.
3. Un logiciel de calcul formel fournit pour f le développement limité suivant, à l'ordre 3, au voisinage de 0 :

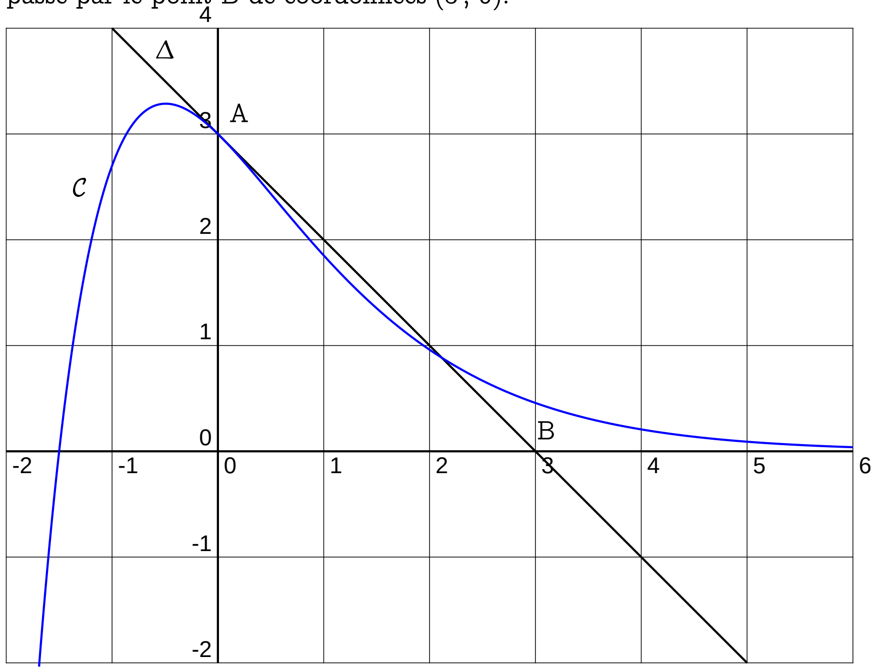
   $$f(x) = 0,4x - 0,08x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

   Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.
   En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, et la position relative de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.
4. Tracer sur la copie la tangente $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ défini au début de la partie *B*.

Exercice 8

1. La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont des nombres réels.

   La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3\ ;\ 0)$.



   a) Déterminer graphiquement $f(0)$.

   b) Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.

   c) Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.
   Dans la suite on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = (2x + 3)e^{-x}$$

   d) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (-2x - 1)e^{-x}$;

   e) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$;

   f) En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$
   (on ne cherchera pas les limites en $-\infty$ et $+\infty$)
2. a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

   b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 3 - x - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.