Exercices BTS 1 : nombres complexes

Exercice 1 Forme exponentielle

Donnez la forme exponentielle de j, $2j$, $1-j$, 32, $j(1-j)$, $j/(1-j)$, $1-j\sqrt{3}$, $-e^{j\pi/4}$.

Exercice 2 Forme trigonométrique

Écrivez sous forme trigonométrique $a = e^{2jx} + e^{-2jx}$, $b = -4i\left(e^{5jt} - e^{-5jt}\right)$, $c = 6e^{4j\pi/9}$, $d = 1 - e^{j\alpha}$.

Exercice 3 Lignes trigonométriques de $\pi/12$

Écrivez sous forme trigonométrique $z = \dfrac{\sqrt{6} - j\sqrt{2}}{2(1-j)}$ puis sous forme algébrique et déduisez-en $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4 Équations du second degré

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+1=0$ *b*) $z^2+z+1=0$ *c*) $z^2-j\sqrt{2}z-j\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$

d) $z^2+5(1-j)z-4(3+4j)=0$ *e*) $z^4+(1-2j)z^2-2j=0$

f) $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$

Exercice 5 Formules d'Euler et de Moivre

Linéarisez $\cos^4 t$, $\cos^3 t + \sin^4 t$. Exprimez $\sin(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

Exercice 6 Équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = 1+i.$$

Exercice 7 Système d'équations dans $\mathbb{C}$

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 8 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
On donne le nombre complexe

$$\underline{\alpha} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}(\underline{Z_2}+\mathrm{R})+\underline{Z_2}\mathrm{R}},$$

avec $\mathrm{R} = 900$, $\underline{Z_1} = 1\,100j$, $\underline{Z_2} = -600j$.

Mettre le nombre complexe $\underline{\alpha}$ sous la forme algébrique $a+bj$.

Exercice 9 Impédance complexe

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z_1} \times \underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}+\underline{Z_3}},$$

avec $\underline{Z_1} = 1+2j$, $\underline{Z_2} = -1+3j$ et $\underline{Z_3} = 4+5j$.
Mettre $\underline{Z}$ sous la forme algébrique $a+bj$.

Exercice 10 Écriture sous forme trigonométrique

Déterminer les formes trigonométriques des nombres

$$z_1 = 3j, \quad z_2 = -5, \quad z_3 = 2-2j \quad z_4 = 1+j\sqrt{3}$$

Exercice 11 Module et argument d'une puissance

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3}-j, \quad z_2 = 2-2j, \quad \mathrm{A} = \frac{z_1^4}{z_2^3}$$

(où i désigne lme nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2, z_1^4, z_2^3 et A.
2. En déduire la forme algébrique des nombres complexes z_1^4, z_2^3 et A.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. Vérifier les résultats obtenus avec votre calculatrice.

Exercice 12 Racine carrée dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 3 - 4j$$

Exercice 13 Équation à coefficients dans $\mathbb{R}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

2. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 14 Équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

1. Calculer $(3-2j)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + z - 1 + 3j = 0.$$

2. Calculer $(5-3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (5-i)z + 2 + 5i = 0.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (5+3i)z + 10 + 5i = 0.$$

Exercice 15 Linéarisations

1. Utiliser les formules d'Euler pour transformer en somme l'expression suivante :

$$f(x) = \sin(2x)\sin(3x)$$

2. Linéariser l'expression $\sin^3(2x)$.

Exercice 16 Ligne de niveau

1. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $|z-3| = 2$?
2. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan vérifiant $\arg(z-(3-i)) = \pi/3$?
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que

$$z = 1 - j\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}\omega}$$

où L et C sont deux contantes réelles strictement positives et où ω est un réel variant dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Exercice 17 Fonction de transfert en électronique

En électronique, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{\mathrm{T}}$ de la pulsation ω, définie quand ω décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{\mathrm{T}}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel ω de $[0,+\infty[$, on a :

$$\underline{\mathrm{T}}(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$

2. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$, unité 20 cm (ou 20 grands carreaux). Placer les points A, B, C, D, E et F d'affixes respectives

$$\underline{\mathrm{T}}(0),\quad \underline{\mathrm{T}}(0,3),\quad \underline{\mathrm{T}}(0,5),\quad \underline{\mathrm{T}}(1),\quad \underline{\mathrm{T}}(2),\quad \underline{\mathrm{T}}(3).$$

3. Montrer que, pour tout nombre réel ω de $[0,+\infty[$, le point M d'affixe $\underline{\mathrm{T}}(\omega)$ est situé sur le demi-cercle inférieur de diamètre [OA].
4. Quel est l'ensemble des points m d'affixe $1-j\omega$ quand ω varie dans $[0,+\infty[$?

Exercice 18 Fonction de transfert en électronique bis

En électronique, sur un montage, on utilise la « fonction de transfert » $\underline{\mathrm{T}}$ de la pulsation ω, définie quand ω décrit l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\underline{\mathrm{T}}(\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)^3}.$$

1. Calculer

$$\underline{\mathrm{T}}(0),\quad \underline{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \underline{\mathrm{T}}(1),\quad \underline{\mathrm{T}}(\sqrt{3}).$$

2. On modifie le montage précédent et on obtient alors la « nouvelle fonction de transfert » $\underline{\mathrm{H}}$ définie par :

$$\underline{\mathrm{H}}(\omega) = \frac{\underline{\mathrm{T}}(\omega)}{1+\underline{\mathrm{T}}(\omega)}$$

Calculer les modules et argument de $\underline{\mathrm{H}}(0)$, $\underline{\mathrm{H}}(1)$ et $\underline{\mathrm{H}}(\sqrt{3})$.

3. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit A le point d'affixe -1 et M le point d'affixe $\underline{\mathrm{T}}(\omega)$.
4. Montrer que le module de $\underline{\mathrm{H}}(\omega)$ est égal à MO/MA.
5. Montrer qu'un argument de $\underline{\mathrm{H}}(\omega)$ est égal à l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MO}}}\right)$.
6. Utiliser les questions **4.** et **5.** pour retrouver les résultats du **2.**