# Les graphes : semaine 40

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

3 octobre 2011

# Sommaire

1 Coloration

2 Graphe planaire

# Sommaire


1 Coloration

2 Graphe planaire

## Définition 1

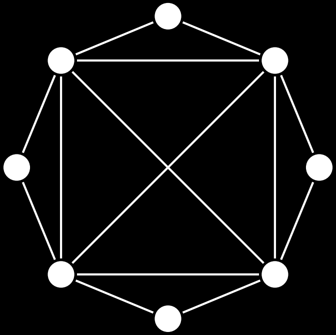
Un **stable** d'un graphe est un sous-graphe sans arête. Le **nombre de stabilité** $\alpha(\mathcal{G})$ d'un graphe $\mathcal{G}$ est la taille d'un stable maximum.

## Définition 1

Un **stable** d'un graphe est un sous-graphe sans arête. Le **nombre de stabilité** $\alpha(\mathcal{G})$ d'un graphe $\mathcal{G}$ est la taille d'un stable maximum.

### Définition 1

Un **stable** d'un graphe est un sous-graphe sans arête. Le **nombre de stabilité** $\alpha(\mathcal{G})$ d'un graphe $\mathcal{G}$ est la taille d'un stable maximum.



## Définition 2

Le **nombre chromatique** $\chi(\mathcal{G})$ d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs tel que l'on puisse colorier les sommets de $\mathcal{G}$ de façon à ce que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

## Remarque

Les ensembles monochromes sont stables donc la coloration permet d'obtenir une partition de X en un nombre minimum de stables.

### Définition 2

Le **nombre chromatique** $\chi(\mathcal{G})$ d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs tel que l'on puisse colorier les sommets de $\mathcal{G}$ de façon à ce que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

### Remarque

Les ensembles monochromes sont stables donc la coloration permet d'obtenir une partition de X en un nombre minimum de stables

## Définition 2

Le **nombre chromatique** $\chi(\mathcal{G})$ d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs tel que l'on puisse colorier les sommets de $\mathcal{G}$ de façon à ce que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

## Remarque

Les ensembles monochromes sont stables donc la coloration permet d'obtenir une partition de X en un nombre minimum de stables

## Définition 3

$$\chi(\mathcal{G}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est stable}$$

$$\chi(\mathcal{G}) = 2 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est biparti}$$

## Définition 3

$$\chi(\mathcal{G}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est stable}$$

$$\chi(\mathcal{G}) = 2 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est biparti}$$

## Définition 3

$$\chi(\mathcal{G}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est stable}$$

$$\chi(\mathcal{G}) = 2 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est biparti}$$

## Définition 3

$$\chi(\mathcal{G}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est stable}$$

$$\chi(\mathcal{G}) = 2 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est biparti}$$

## Définition 3

$$\chi(\mathcal{G}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est stable}$$

$$\chi(\mathcal{G}) = 2 \Leftrightarrow \mathcal{G} \text{ est biparti}$$

## Théorème 4

*On a pour tout graphe* $\mathcal{G} = (X, A)$ *:*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(\mathcal{G})} \right\rceil \leqslant \chi(\mathcal{G}) \leqslant n - \alpha(\mathcal{G}) + 1$$

Conséquence :

**Corollaire 5**

*Le graphe complet $K_n$ est $n$−coloriable.*

## Définition 6

Un sous-graphe complet d'un graphe $\mathcal{G}$ est appelé une **clique**.

L'ordre de la plus grande clique dans $\mathcal{G}$ est noté $\omega(\mathcal{G})$.

## Définition 6

Un sous-graphe complet d'un graphe $\mathcal{G}$ est appelé une **clique**.
L'ordre de la plus grande clique dans $\mathcal{G}$ est noté $\omega(\mathcal{G})$.

## Définition 6

Un sous-graphe complet d'un graphe $\mathcal{G}$ est appelé une **clique**.
L'ordre de la plus grande clique dans $\mathcal{G}$ est noté $\omega(\mathcal{G})$.

## Théorème 7

$$\chi(GR) \geqslant \omega(\mathcal{G})$$

**Théorème 8 (Tutte 1954)**

*Pour tout entier $k \geqslant 2$, il existe un graphe $k-$chromatique sans clique à 3 sommets (triangle).*

Cas particuliers en TD. Admis dans le cas général.

**Théorème 8 (Tutte 1954)**

*Pour tout entier $k \geqslant 2$, il existe un graphe $k-$chromatique sans clique à 3 sommets (triangle).*

Cas particuliers en TD. Admis dans le cas général.

**Théorème 8 (Tutte 1954)**

*Pour tout entier $k \geqslant 2$, il existe un graphe $k-$chromatique sans clique à 3 sommets (triangle).*

Cas particuliers en TD. Admis dans le cas général.

## Théorème 9 (Nordhaus et Gaddum - 1960)

*Soit* $\mathcal{G} = (X, A)$ *un graphe et* $\overline{\mathcal{G}} = (X, \overline{A})$ *son complémentaire.*

1. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant n$
2. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant n+1$
3. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant 2\sqrt{n}$
4. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

### Théorème 9 (Nordhaus et Gaddum - 1960)

*Soit* $\mathcal{G} = (X, A)$ *un graphe et* $\overline{\mathcal{G}} = (X, \overline{A})$ *son complémentaire.*

1. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant n$
2. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant n + 1$
3. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant 2\sqrt{n}$
4. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

## Théorème 9 (Nordhaus et Gaddum - 1960)

*Soit* $\mathcal{G} = (X, A)$ *un graphe et* $\overline{\mathcal{G}} = (X, \overline{A})$ *son complémentaire.*

1. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant n$
2. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant n + 1$
3. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant 2\sqrt{n}$
4. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

## Théorème 9 (Nordhaus et Gaddum - 1960)

*Soit* $\mathcal{G} = (X, A)$ *un graphe et* $\overline{\mathcal{G}} = (X, \overline{A})$ *son complémentaire.*

1. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant n$
2. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant n + 1$
3. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant 2\sqrt{n}$
4. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

## Théorème 9 (Nordhaus et Gaddum - 1960)

*Soit* $\mathcal{G} = (X, A)$ *un graphe et* $\overline{\mathcal{G}} = (X, \overline{A})$ *son complémentaire.*

1. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant n$
2. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant n + 1$
3. $\chi(\mathcal{G}) + \chi(\overline{\mathcal{G}}) \geqslant 2\sqrt{n}$
4. $\chi(\mathcal{G}) \cdot \chi(\overline{\mathcal{G}}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

### Définition 10

L'**indice chromatique** $\chi'(\mathcal{G})$ d'un graphe $\mathcal{G} = (X, A)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de sorte que deux arêtes adjacentes ne soient jamais de la même couleur.

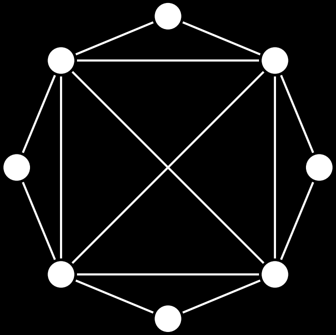
On admettra le théorème suivant :

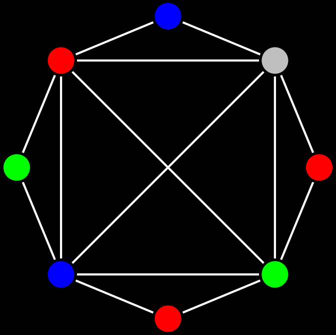
### Théorème 11 (Vizing - 1964)

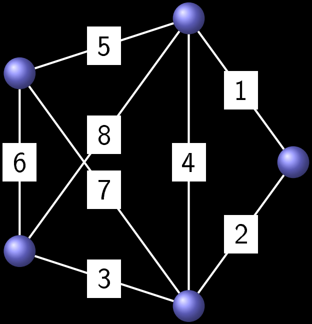
*Pour tout graphe* $\mathcal{G}$,

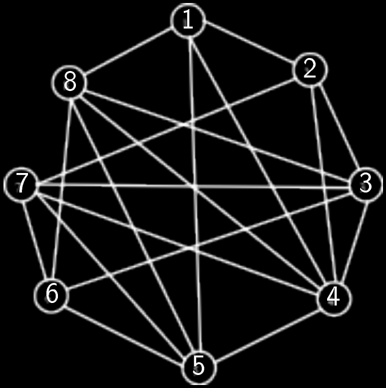
$$\Delta(\mathcal{G}) \leqslant \chi'(\mathcal{G}) \leqslant \Delta(\mathcal{G}) + 1$$

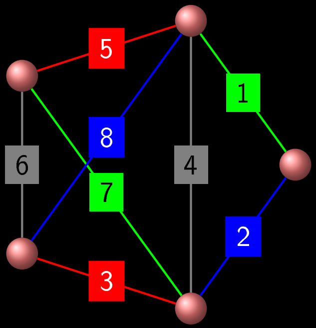
*avec* $\Delta(\mathcal{G})$ *le degré maximum d'un sommet du graphe.*






5
1
8
6
4
7
2
3


1
2
3
4
5
6
7
8


5
1
8
6
4
7
2
3

# Sommaire

1 Coloration

2 Graphe planaire

## Définition 12

Un graphe planaire est un graphe que l'on peut *dessiner* sur un plan sans que ses arêtes ne se croisent.

Dans un graphe plan, il y a des faces internes et une face externe.

**Théorème 13 (Formule d'Euler)**

*Soit $f$ le nombre de faces d'un graphe planaire :*

$$n - m + f = 2$$