CINQUIÈME LEÇON

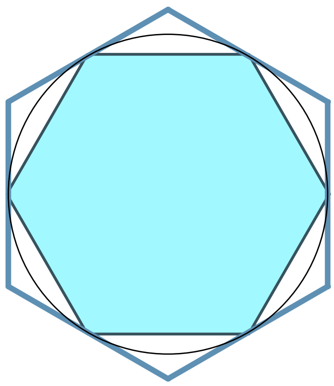
INTÉGRATION

Résumé La notion d'intégrale est bien plus riche que le calcul d'aire vu en terminale. D'ailleurs il existe plusieurs définitions différentes de l'intégrale : intégrale de Riemann, de Lebesgue,... Nous construirons l'intégrale de la manière la plus abordable en partant d'une intuition physique. Nous découvrirons ainsi qu'une fonction intégrable n'est pas forcément continue et n'admet pas forcément de primitive. Nous définirons donc l'intégrale et prouverons la plupart de ses propriétés sans faire appel aux primitives, puis nous finirons malgré tout par faire le lien entre primitive et intégrale, car ce résultat est un des plus importants de l'analyse.

1 - Mise en place d'une définition

Une vieille idée

Vers -250 avavt JC, l'incontournable Archimède eu l'idée de calculer l'aire d'un disque en l'approximant par deux suites d'aires de polygones la majorant et la minorant respectivement .



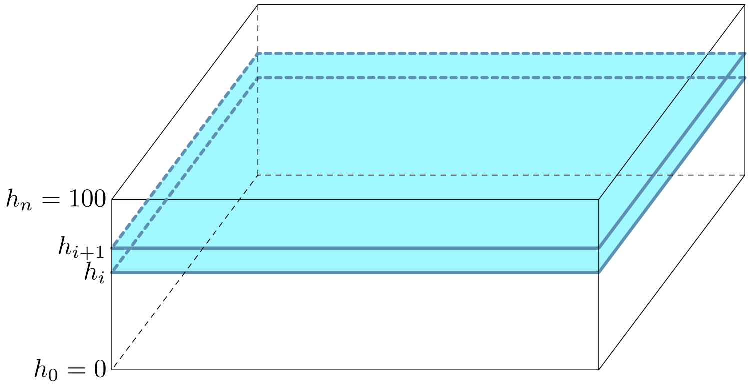
On en est resté là pendant des siècles, car il a fallu attendre le XIX$^{\text{ème}}$ pour oser parler de limite. Pourtant, tout était là, comme nous allons le voir en suivant les traces de Gaston Darboux (1842 - 1917).

Une approche physique

• Un problème écologique

Le problème avec l'énergie éolienne, c'est le stockage de l'énergie produite. Une des possibilités envisagée consiste à la stocker sous forme d'énergie potentielle de pesanteur.

Rappel : un objet de masse m pouvant tomber d'une altitude h possède l'énergie potentielle de pesnteur $\mathrm{E}_p = mgh$ avec $g \simeq 10\mathrm{m.s}^{-2}$.



On considère un réservoir en forme de pavé droit à base carrée de 1 km de côté et de 100 m de hauteur. On découpe ce pavé en n tranches comme indiqué sur la figure.

Le volume d'une tanche bleue vaut $1000 \times 1000 \times (h_{i+1} - h_i\ \mathrm{m}^3$. Or 1 m^3 a une masse de 1000 kg, donc la masse de la tranche bleue vaut

$$m = 10^9(h_{i+1} - h_i)\ \mathrm{kg}$$

De manière évidente, l'énergie potentielle croît avec la heuteur, donc

$$10^9(h_{i+1} - h_i) \times 10 \times h_i \leqslant \mathrm{E}_{pi} \leqslant 10^9(h_{i+1} - h_i) \times 10 \times h_{i+1}$$

De plus, l'énergie potentielle de pesanteur est additive, c'est à dire que $\mathrm{E}_p = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{E}_{pi}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 10^{10}(h_{i+1} - h_i)h_i \leqslant \mathrm{E}_p \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} 10^{10}(h_{i+1} - h_i)h_{i+1}$$

On va considérer des tranches de hauteur constante $\dfrac{100}{n}$, i.e. $h_i = \dfrac{100i}{n}$. On obtient donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} 10^{10} \times \frac{10^2 i}{n} \times \frac{10^2}{n} \leqslant \mathrm{E}_p \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} 10^{10} \times \frac{10^2 i}{n} \times \frac{10^2}{n}$$

Et donc

$$\frac{10^{14}}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \leqslant \mathrm{E}_p \leqslant \frac{10^{14}}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + 1$$

Or un résultat classique donne $\sum_{i=0}^{n-1} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et donc $\sum_{i=0}^{n-1} i + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. D'où

$$\frac{10^{14}}{2} \times \frac{n(n+1)}{n^2} \leqslant \mathrm{E}_p \leqslant \frac{10^{14}}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)}{n^2}$$

L'idée est bien sûr de faire tendre n vers l'infini, car plus n sera grand, plus l'épaisseur des tranches sera petite et donc plus l'erreur commise sur l'approximation inférieure et supérieure de E_p sera petite.

$$\underbrace{\frac{10^{14}}{2}\times\frac{n(n+1)}{n^2}}_{\to 5\times 10^{13}}\leqslant \mathrm{E}_p\leqslant \underbrace{\frac{10^{14}}{2}\times\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}}_{\to 5\times 10^{13}}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on obtient $\mathrm{E}_p = 5\times 10^{13}$ J.

Pour avoir un ordre de grandeur, il faut savoir qu'un parc de 167 éoliennes de 120 m de haut en Mer du Nord produit chaque jour en moyenne $3{,}85\times 10^{13}$ J. Il faudra malgré tout tenir compte des pertes dues à la transformation de l'énergie potentielle de pesanteur en énergie électrique par l'intermédiaire d'une turbine par exemple.

• Du cas particulier au cas général

Voici une procédure qui semble efficace. Essayons de la schématiser pour essayer de la généraliser à d'autres situations [1].

- ▹ Nous voulions mesurer une grandeur (ici E_p) dépendant d'un intervalle (ici $[0,100]$) et d'une fonction définie sur l'intervalle (ici la « hauteur ») : notons cette grandeur $\mathscr{I}([a,b],f)$.
- ▹ Nous avons alors **subdivisé régulièrement** l'intervalle $[a,b]$ en une suite de petits intervalles $[a_i,a_{i+1}]$ de même taille, avec

  $$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

  Notons σ_n cette subdivision.
- ▹ Nous avons pu déterminer sur chacun de ces intervalles $[a_i,a_{i+1}]$ la « borne inférieure [2] » (ici h_i) et la « borne supérieure [3] » (ici h_{i+1}) de la fonction f : notons les respectivement m_i et M_i. Cela est possible si f est bornée sur $[a,b]$.
- ▹ Nous avons alors encadré $\mathscr{I}([a,b],f)$ entre deux sommes que nous noterons $s(\sigma_n)$ et $\mathrm{S}(\sigma_n)$ pour obtenir

  $$s(\sigma_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)m_i\leqslant \mathscr{I}([a,b],f)\leqslant \mathrm{S}(\sigma_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\mathrm{M}_i$$
- ▹ Nous sommes passé à la limite en utilisant le théorème des gendarmes.

Tout ceci est bien beau mais des questions se posent :

- ▹ Nous avons choisi une subdivision particulière, mais aurions-nous obtenu le même résultat avec une autre subdivision ?
- ▹ La fonction « hauteur » était assez particulière : bornée, croissante, continue, amis aurions-ous obtenu le même résultat avec une fonction moins régulière ?
- ▹ Les deux sommes admettaient des limites et en particulier la même limite : est-ce que ce sera toujours le cas ?

Sommes de Darboux

• Mise en place de la définition

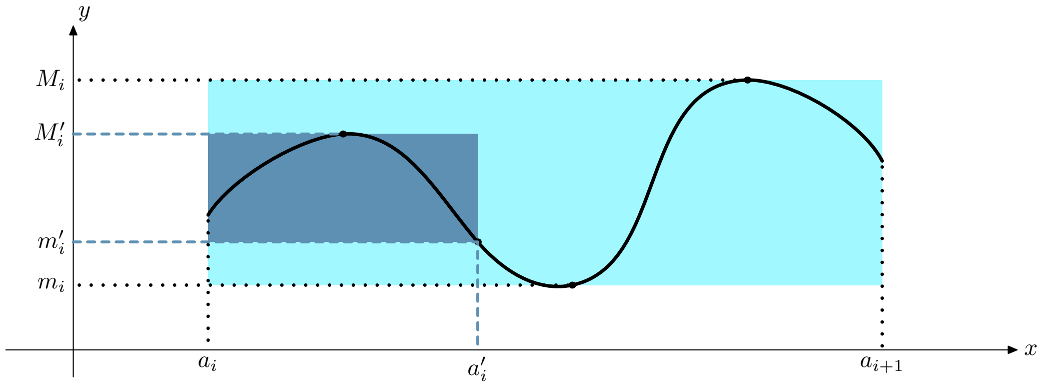
C'est en 1875 que notre Gaston Darboux national présenta sa théorie de l'intégration simplifiant les idées de Riemann. Nous n'entrerons pas forcément dans tous les détails mais nous donnerons les idées générales de cette théorie donnée dans une version simplifiée.

On ne considèrera dans cette leçon que des SUBDIVISIONS RÉGULIÈRES pour simplifier nootre propos, c'est à dire des subdivisions où chaque segment élémentaire a la me amplitude.

On parle de subdivision plus fine, quand on intercalle de nouveaux points « entre les a_i », et alors n augmente.

1. Nous nous contenterons de l'étude des fonctions d'une variable réelle
2. Le plus grand des minorants, souvent égal au minimum
3. Le plus petit des minorants, souvent égal au maximum

Un petit dessin montre que les suites $(s(\sigma_n))$ sont croissantes et les suites $(S(\sigma_n))$ sont décroissantes : si on coupe un intervalle $[a_i,a_{i+1}]$ en 2, le « nouveau » minimum est supérieur ou égal au précédent, le nouveau maximum est lui inférieur ou égal au précédent.



Il reste à vérifier qu'on a toujours $s(\sigma_k) \leqslant S(\sigma_p)$ pour tout couple d'entiers (k,p). En effet, en réunissant les deux subdivisions, on obtient une subdivision plus fine σ_n, et , d'après ce qui précède,

$$s(\sigma_k) \leqslant s(\sigma_n) \leqslant S(\sigma_n) \leqslant S(\sigma_p)$$

Tout ça pour dire que SI $\left(S(\sigma_n) - s(\sigma_n)\right)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, les suites $\left(s(\sigma_n)\right)$ et $\left(S(\sigma_n)\right)$ sont adjacentes et convergent donc vers une même limite qui sera l'intégrale de f au sens de Darboux : OUF !

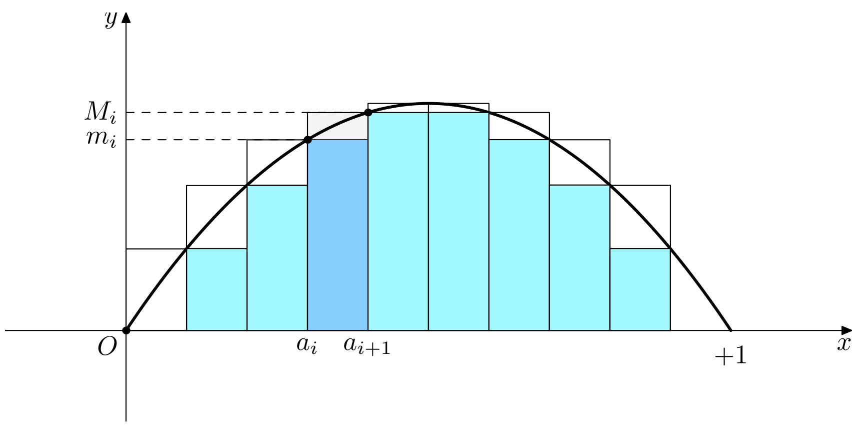
Théorème V-1 Critère d'intégrabilité au sens de Darboux

Avec les notations précédentes, une fonction f, bornée sur $[a,b]$ est dite intégrable au sens de Darboux sur $[a,b]$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S(\sigma_n) - s(\sigma_n)\right) = 0$. Alors

$$\mathscr{I}([a,b],f) = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)m_i = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)M_i$$

• **Interprétation graphique**

En fait $(a_{i+1} - a_i)m_i$ représente l'aire du rectangle bleu et $a_{i+1} - a_i)M_i$ celle des rectangles bleu et gris. Donc $s(\sigma_n)$ et $S(\sigma_n)$ sont représentées par les sommes des aires des rectangles inférieurs et supérieurs respectivement : on retrouve alors l'idée d'Archimède pour le cercle.



On fait alors facilement le lien entre intégrale et aire dans le cas d'une fonction positive assez régulière.

• Interprétation analytique

On a « coincé » la fonction f entre deux fonctions « en escalier » pour lesquelles il est facile de définir une aire ou une intégrale. Si ce « coicement » est suffisamment régulier, on pourra passer des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier facile à calculer aux propriétés de l'intégrale de la fonction f. C'est un raisonnement fondamental de l'analyse : on approche une fonction compliquée par des fonctions simples.

2 - Quelles sont les fonctions intégrables ?

Un exemple de référence très simple

La fonction f constante vérifiant $f(x) = 1$ pour tout $x \in [a,b]$ a une intégrale facilement calculable. En effet, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a $m_i = \mathrm{M}_i = 1$, donc pour tout entier n on a

$$s(\sigma_n) = \mathrm{S}(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_0 = b - a$$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \big(\mathrm{S}(\sigma_n) - s(\sigma_n)\big) = 0$: la fonction est bien (Darboux-)intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x = b - a$$

Dans la suite, « intégrable » sous-entendra « Darboux-intégrable »

Fonctions en escalier

Nous n'entrerons pas dans les détails, mais il est assez immédiat de se rendre compte que les fonctions en escalier sont intégrables sur de bons intervalles : à partir d'un moment, le pas des subdivisions devient plus petit que la largeur des marches. Cela constitue une première différence d'avec la terminale : on peut calculer des intégrales de fonctions non continues et heureusement, car de telles fonctions se rencontrent souvent en physique. Par exemple, la fonction partie entière est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Fonctions continues

Théorème V-2
Les fonctions continues sur $[a,b]$ sont intégrables sur $[a,b]$

L'idée de la démonstartion vient du résultat suivant : pour une fonction continue, plus x et x' sont proches, plus leurs images le sont aussi. Donc pour une subdivision de pas suffisamment petit, on pourra majorer chaque $\mathrm{M}_i - m_i$ par ce qu'on veut. La démonstartion étant assez technique, nous ne la verrons pas dans le détail.

3 - Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

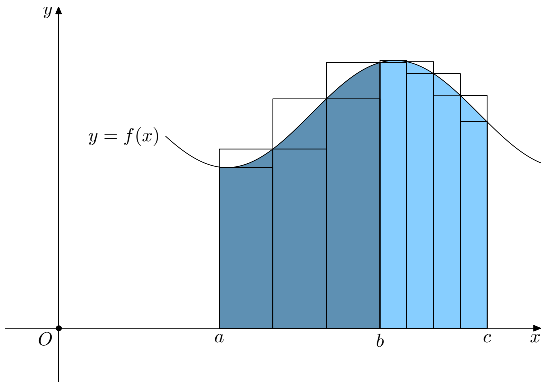
C'est le cœur du problème : cette relation entraîne toutes les autres.

Il s'agit de monter

Théorème V-3 Relation de Chasles
Soit f une fonction intégrable sur $[a,c]$, sur $[b,c]$ et sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour s'en convaincre **intuitivement** , il suffit de se dire que si les sommes de Darboux convergent sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors elles vont converger sur $[a,c]$ vers la somme de ces limites en combinant les subdivisions : c'est une histoire de somme de limites finies. Nous n'entrerons pas plus dans les détails (si nous pensons « aire », le cas des fonctions positives devient assez naturel).



On peut prouver ainsi les propriétés que vous connaissez bien : l'idée à retenir, c'est que les propriétés de l'intégrale s'obtiennent **par passage à la limite** de sommes discrètes, c'est pourquoi elles ont posé problème aussi longtemps : il a fallu attendre plusieurs siècles pour avoir une définition correcte des limites. En ce qui vous concerne, vous vous contenterez de quelques mois...

Rappelons donc ces propriétés

Propriété V-1 Propriétés de l'intégrale
Avec d et g des fonctions intégrables sur $[a,b]$,

- ▷ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- ▷ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- ▷ $\displaystyle\int_a^b \left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right]\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ avec λ et μ des réels : c'est la linéarité de l'intégrale.
- ▷ $\displaystyle f(x) \geqslant 0 =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- ▷ $\displaystyle f(x) \leqslant g(x) =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$: c'est la croissance de l'intégrale.
- ▷ $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\,\mathrm{d}x\right|$: c'est l'inégalité triangulaire appliquée aux intégrales.

4 - Valeur moyenne

Définition

La moyenne d'un nombre discret de valeurs est facile à obtenir : il suffit d'additionner ces valeurs et de les diviser par leur nombre

$$m_n(f) = \frac{f(a_0) + f(a_1) + \cdots + f(a_{n-1})}{n}$$

On pense tout naturellement à passer à la limite et à remplacer la somme discrète par une intégrale. Mais attention : ceci n'est valable que si la subdivision n'est pas trop irrégulière. On pourrait imaginer en effet que la subdivision prend une infinité de valeurs entre a et $(b-a)/2$ et aucune ailleurs, alors $m_n(f)$ ne pourrait représenter une approximation convenable d'une moyenne. Nous continuerons donc à considérer des subdivisions régulières.

Nous admettrons donc le résultat suivant

Théorème V-4 Valeur moyenne
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ une subdivision **régulière** de $[a,b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On appelle $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

Vous pouvez retenir égalment qu'intuitivement, la valeur moyenne est une sorte de somme des valeurs de $f(x)$ affectées des coefficients $\mathrm{d}x$ le tout divisé par la somme des coefficients $\mathrm{d}x$ Or pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on remarque que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)m_i = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\mathrm{M}_i = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\times 1 = b-a$$

quelque soit la subdivision, donc

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

et on retrouve intuitivement le résultat.

Est-ce que la valeur moyenne est une valeur prise par la fonction ?

Ça n'a rien d'évident a priori, puisque vous puvez avoir 15 de moyenne en n'ayany jamais eu de note égale à 15 (14 et 16 par exemple).

Et pourtant c'est vrai comme nous allons le prouver : comme quoi le passage à la limite du discret au continu présente quelques dangers !

Comme notre fonction f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée, donc il existe deux réels m et M tels que

$$m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$$

Alors, on obtient successivement

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}x$$
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

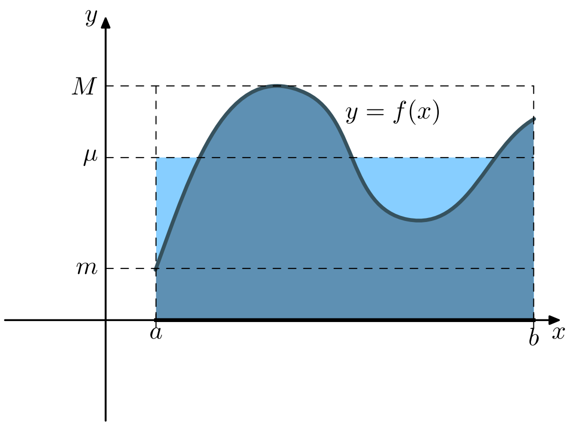
et finalement

$$m \leqslant \mu \leqslant \mathrm{M}$$

Donc μ appartient à l'intervalle image de f : il existe donc un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \mu$.

Théorème V-5 Formule de la moyenne
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors il existe un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que

$$f(x_0) = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



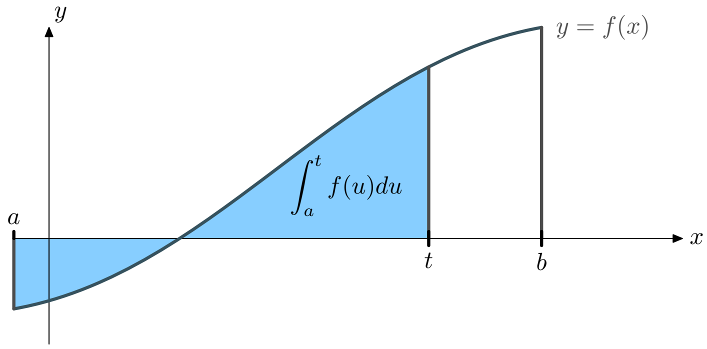
5 - Primitive et intégrale

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Considérons une fonction f que nous supposerons continue sur un intervalle $[a,b]$ pour simplifier notre propos.
On peut donc définir une fonction S sur $[a,b]$ telle que

$$\mathrm{S} : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u \end{array}$$

Du point de vue graphique, on peut interpréter $\mathrm{S}(t)$ comme l'aire algébrique du domaine bleu :



Comment retrouver f connaissant $\int_a^b f(u)\,du$?

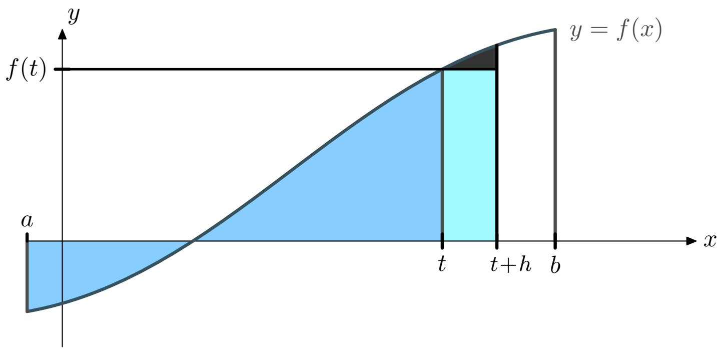
Rappelons d'abord la définition d'une primitive :

Définition V-1 Primitive
Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. Alors F **est une primitive de** f lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$

Nous allons donc essayer de retrouver f connaissant S.

• **Approche intuitive**

On fixe t dans $[a,b[$ et on considère un « petit » réel positif h. Observons ce qui se passe sur le « petit » intervalle $[t, t+h]$



On « voit » que, pour h petit, l'aire noire est « petite » devant l'aire bleue du rectangle situé en dessous. Cela donne

$$S(t+h) - S(t) = h \times f(t) + \text{aire noire} \simeq h \times S(t)$$

et donc

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} \simeq f(t)$$

Ainsi, le taux d'accroissement de S entre t et h « ressemble » à $f(t)$ quand h est « petit ».

On « sent » donc que S est dérivable en t et que $S'(t) = f(t)$ et donc que S est une primitive de f, ce qui crée le lien bien connu entre primitive et inrtégrale.

Il reste à prouver cette intuition.

• Preuve de notre intuition

Nous allons utiliser la formule de la moyenne vue précédemment appliquée à la fonction f continue sur $[t, t+h]$. Cela donne qu'il existe un réel t_0

$$\frac{1}{t+h-t}\int_t^{t+h} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{h}\times\big(\mathrm{S}(t+h)-\mathrm{S}(t)\big) = f(t_0)$$

C'est à dire que

$$\frac{\mathrm{S}(t+h)-\mathrm{S}(t)}{h} = f(t_0)$$

Or f est continue sur $[t, t+h]$, donc quand h tend vers 0, $f(t_0)$ tend vers $f(t)$ et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{S}(t+h)-\mathrm{S}(t)}{h} = \mathrm{S}'(t) = f(t)$$

Il resterait à faire la même preuve pour h négatif.

On obtient donc le résultat suivant

Théorème V-6 Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit

$$\mathrm{S}:\begin{array}{ccc}[a,b] & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \displaystyle\int_a^t f(u)\,\mathrm{d}u\end{array}$$

alors S est dérivable sur $[a, b]$ et $\mathrm{S}' = f$

Comment calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ?

Rappelons une propriété bien connue

Propriété V-2

Deux primitives d'une même fonction définie sur un intervalle diffèrent d'une constante

En effet, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $\mathrm{F}' = \mathrm{G}' = f$ et donc $\mathrm{F}' - \mathrm{G}' = (\mathrm{F}-\mathrm{G})' = 0$. La fonction $\mathrm{F}-\mathrm{G}$ est donc constante sur I et il existe un réel k tel que $\mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = k$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Soit donc F une primitive de f. Comme la fonction S est elle aussi une primitive de f, il existe donc un réel k constant tel que $\mathrm{S}(t) = \mathrm{F}(t) + k$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{S}(b) - \mathrm{S}(a) = \big(\mathrm{F}(b)+k\big) - \big(\mathrm{F}(a)+k\big) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Propriété V-3 Intégrale et primitive

Soit F une primitive d'une fonction f continue sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$