Centrale : oral de Maths II

2 Juin 2014 - Version 0.1 MP*

Exercice 1. (Centrale 2011) Soit G le sous-groupe de $GL_2()$ engendré par les deux matrices S et T suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons que c'est le plus petit sous-groupe de $GL_2()$ contenant S et T.

a) Avec le logiciel de calcul formel, créer les matrices S, T. Expliciter les éléments du groupe $\langle R \rangle$ engendré par la matrice $R = ST$ et préciser le cardinal de ce sous-groupe de G. Quelles sont les matrices SR et R^7S ?

b) Montrer que tout élément de G est soit une puissance R^k de R, soit un produit R^kS. Préciser le cardinal n de G. Dresser la liste de tous les éléments de G et déterminer la nature géométrique des endomorphismes canoniquement associés dans l'espace euclidien R^2.

c) La transformation $\Phi_S : g \mapsto S \cdot g$ définit une permutation de l'ensemble G. À l'aide du logiciel de calcul formel, dresser la séquence des éléments de G et de leurs images par Φ_S. Quelle est la signature de la permutation de G (qu'on peut identifier à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$) ainsi définie ?

Exercice 2. (Centrale 2011) On définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ les nombres complexes

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + 2\frac{i}{k}\right)$$

a) On note, dans le plan complexe, A_n et B_n les points d'affixes respectives u_n et v_n.
Utiliser le logiciel de calcul formel pour visualiser les lignes polygonales $A_1, A_2, \dots, A_n$ et $B_1, B_2, \dots, B$ pour diverses valeurs de n : par exemple 50,100,500... Un point du plan d'affixe $z = x + iy$ sera repéré par la liste $[x, y]$ de ses deux coordonnées.

b) Étudier la convergence de la suite (u_n).
S'il y a convergence, donner à l'aide du logiciel de calcul formel, une valeur approchée (par module et argument) de $\lim_{n \to +\infty} u_n$ à 10^{-3} près.

c) Étudier la convergence de la suite (v_n).
On pourra justifier l'existence d'une constante L telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2}{k} = 2 \ln n + L + o(1)$$

et étudier la nature (convergente ou divergente) de la suite complexe $(z_n)_{n \geqslant 1}$:

$$z_n = \exp(2i \ln n)$$

Exercice 3. (Centrale 2011) On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + \frac{x}{2k}}{1 + \frac{x}{2k-1}} \right)$$

a) *i*) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est convergente, de limite strictement positive. On note $P(x)$ cette limite.

ii) Tracer sur $[0, 20]$, le graphe de quelques fonctions P_n.

b) *i*) Démontrer que P est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Étudier le sens de variation de P sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que l'existence de limite de P en $+\infty$.

c) *i*) Calculer $P(2j)$ pour tout entier naturel j. Confirmer le résultat avec le logiciel de calcul formel (on rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$)

ii) P est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 4. (Centrale 2011) On considère dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, un arc Γ de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier paramétré par une abscisse curviligne s :

$$M : s \in \mathbb{R} \mapsto M(s) \in \mathbb{R}^2$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $G(s)$ le centre de gravité de l'arc $\widehat{M(0)M(s)}$ défini ainsi

$$\forall s \in \mathbb{R}^\star, G(s) = \frac{1}{s} \int_0^s M(u)\,du \text{ et } G(0) = M(0)$$

Soit alors Δ l'arc paramétré par $G : s \in \mathbb{R} \mapsto G(s)$.

a) Dans cette question, Γ est l'arc paramétré par $N(t) = (t, \cosh t)$ où $\cosh t$ est le cosinus hyperbolique de t. Calculer son abscisse curviligne s nulle en $t = 0$ et paramétrer Γ par s. En déduire les coordonnées de $G(s)$.
Tracer sur un même graphique les supports de Γ et Δ.

b) On suppose dans cette question que l'arc Γ est paramétré par $N(t) = (t, f(t))$ où la fonction f est convexe de classe $\mathcal{C}^1$.

i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$y \geqslant f(x) \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, y \geqslant f'(u)(x-u) + f(u)$$

ii) En déduire que le support de l'arc Δ est « au dessus »du support de Γ.

c) Reprendre les questions posées au 1. avec l'arc Γ paramétré par $N(t) = (\cos t, \sin t)$.

d) On suppose dans cette question de la fonction M est périodique de période $L > 0$.

i) Montrer que $G(s)$ converge vers un point Ω lorsque s tend vers $+\infty$.

ii) Que représente Ω pour le support de Γ ? Montrer que Ω est un point multiple de l'arc Δ.

iii) Avec l'exemple de la question 3., compléter le graphique des supports de Γ et Δ par celui des segments de droite $(M(s)G(s))$ pour $s = \pi/2, 3\pi/4$ et π.
Émettre une conjecture puis la démontrer dans le cas général.

Exercice 5. (Centrale 2011) On considère $n+1$ réels deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n$ et A le polynôme

$$A(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - a_k)$$

Soit B un polynôme réel tel que pour tout $k = 0, \dots, n$, $B(a_k) \neq 0$. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le reste $R = f(P)$ de la division euclidienne de BP par A.

a) Justifier qu'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Étude d'un exemple avec le logiciel de calcul formel : on demande de résoudre cette question avec le logiciel.
On choisit

$$n = 2, A(X) = (X-1)(X-2)(X-3) \text{ et } B(X) = X^3$$

Ainsi f est ici l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
Créer l'application f. Utiliser la commande rem qui fournit le reste de la division euclidienne.
Expliciter alors l'image de $P = aX^2 + bX + c$.
Déterminer le noyau de f.
Suivre le même procédé pour déterminer les éléments propres de f, en annulant les coefficients de $Q = f(P) - \lambda P$.
Créer la matrice de f dans la base canonique de E et retrouver ainsi les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

c) On revient au cas général. Déterminer le noyau, les éléments propres (valeurs propres, sous-espaces propres) et le déterminant de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 6. (Centrale 2011) Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à deux et q un nombre complexe non nul tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^\star$, $q^k \neq 1$. On considère également une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) On suppose qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M^{-1}AM = qA$$

On notre χ_A le polynôme caractéristique de A. Déterminer une relation entre $\chi_A(X)$ et $\chi_A\left(\frac{X}{q}\right)$.
En déduire que A est nilpotente.

b) Cette question est à résoudre à l'aide du logiciel de calcul formel.
Dans cette question, on suppose que $q = 2$ et que A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ vérifiant $AM = 2MA$

ii) Que dire de l'ensemble des matrices M ainsi obtenues ?

iii) Déterminer les matrices $M \in GL_6(\mathbb{C})$ vérifiant $M^{-1}AM = 2A$

Exercice 7. (Centrale 2011) L'objectif de cet exercice est de proposer un développement en série alternée du nombre π.
En utilisant votre logiciel de calcul formel :

a) Montrer que, pour n, m entiers naturels

$$\int_0^1 t^n(1-t)^m \, dt = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$$

b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \, dx = \frac{22}{7} - \pi$$

En déduire

$$\frac{3958}{1260} < \pi < \frac{3959}{1260}$$

c) On note $A(x)$ le quotient de $x^4(1-x)^4$ par $1+x^2$ (on ne le calculera explicitement que plus tard).

Montrer que

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{A(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}}$$

En déduire que

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k \text{ avec } L_k = \int_0^1 A(x)x^{4k}(1-x)^{4k} \, dx$$

d) Établir que pour n entier naturel

$$\pi = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} L_k + \lambda \int_0^1 \frac{x^{4(n+1)}(1-x)^{4(n+1)}}{1+x^2} \, dx$$

où λ est un réel dépendant de n que l'on exprimera.

e) Calculer $A(x)$, L_0, L_1 et proposer un encadrement du nombre π.