CINQUIÈME AVENTURE

RECETTES À BAC - ANALYSE

- 1 : *Comment montrer qu'une fonction est dérivable ?*

Là où la fonction est définie, les théorèmes opératoires permettent en général de conclure.

Par exemple $x \mapsto (x+1)e^x + \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables.

Faîtes néanmoins attention à des fonctions comme $x \mapsto \sqrt{x}$ où $x \mapsto |x|$: elles ne sont pas dérivables en zéro, même si elles sont définies et même continues en zéro.

Là où il y a « problème », *i.e.* là où les théorèmes habituels ne permettent pas de conclure, il faut revenir à la définition utilisant la limite du taux de variation. Ainsi f sera dérivable en a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Alors

$$f'(a) = \lim_{x\to a,\ x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Par exemple, soit $f\ :\ x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$, définie sur $[-1,1]$. Les théorèmes opératoires montrent que f est dérivable sur $]-1,1[$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $]-1,1[$ mais ne permettent pas de conclure en -1 et en 1.

Au voisinage de 1, étudions la limite du taux de variation

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \sqrt{x^2-1}$$

Alors $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0$ et donc f est dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Au voisinage de -1, le taux de variation s'écrit

$$\frac{(x-1)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \frac{(x-1)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}} = \frac{(x-1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$. La fonction f n'est donc pas dérivable en -1. Nous pouvons malgré tout déduire du résultat que la courbe admet au point d'abscisse -1 une tangente verticale (car de « pente infinie »).

- 2 : *Comment étudier la position relative de deux courbes ?*

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ et $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = g(x)$. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

En effet, si nous obtenons par exemple $f(x) - g(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle I, alors $f(x) \geqslant g(x)$ sur I et donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}'$ sur I.

- 3 : *Comment montrer qu'une courbe admet une asymptote d'équation $y = ax + b$ au voisinage de ω ?*

Il suffit de montrer que $[f(x) - (ax+b)]$ tend vers 0 quand x tend vers ω.

- 4 : Quel lien existe-t-il entre tangente et fonction dérivée ?

Si f est dérivable en a, sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse a d'équation

$$y = (x - a) \cdot f'(a) + f(a)$$

Retenez bien que $\mathcal{T}_a$ admet comme coefficient directeur $f'(a)$.

- 5 : Comment résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 32 = 0$?

Je ne pense pas que la résolution de cette équation vous pose d'énormes problèmes. Profitons-en pour « décortiquer » le raisonnement sous-jacent.

Tout d'abord, nous pouvons nous demander ce que signifie « résoudre une équation ».

Une équation est une proposition mettant en œuvre une égalité, ici $2x - 32 = 0$.

Cette proposition peut être fausse : si nous donnons à x la valeur 0, nous obtenons $-32 = 0$.

Elle peut être vraie : si nous donnons à x la valeur 16, nous obtenons $0 = 0$.

Résoudre l'équation dans l'ensemble des nombres réels, c'est donc déterminer les éléments de $\mathbb{R}$ qui rendent vraie la proposition.

Nous pouvons décomposer la résolution d'une équation en deux phases

- ▷ transformer la proposition, *i.e.* déterminer une proposition réputée plus simple que la première mais qui admette le même ensemble de solutions;
- ▷ déterminer l'ensemble des solutions.

Ici, appelons (E) la proposition $2x - 32 = 0$

$(E) \iff 2x - 32 + 32 = 32$

Le symbole $\iff$ signifie ici que les deux prositions ont le même ensemble de solutions

$(E) \iff 2x = 32$

$(E) \iff 2x/2 = 32/2$

$(E) \iff x = 16$

Nous pouvons nous arrêter là car la dernière proposition n'est vraie que si nous donnons à x la valeur 16. Or 16 est un nombre réel, donc finalement l'équation proposée admet une unique solution, le réel 16.

- 6 : Comment montrer qu'une fonction est paire ?

Il faut vérifier que l'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à zéro puis que pour tout réel x de l'ensemble de définition $f(-x) = f(x)$.

Nous en déduisons que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffira donc d'étudier la fonction sur la « moitié » de l'ensemble de définition, puis de déduire le reste de la courbe par symétrie.

- 7 : Comment montrer qu'une fonction est impaire ?

cf le paragraphe précédent en remplaçant $f(-x) = f(x)$ par $f(-x) = -f(x)$ et « symétrique par rapport à l'axe des ordonnées » par « symétrique par rapport à l'origine du repère ».

- 8 : Comment montrer qu'une courbe admet le point $A(a,b)$ comme centre de symétrie ?

Faîtes avant tout un dessin pour visualiser que A est le milieu du segment $[MM']$ avec $M\big(x,f(x)\big)$ et $M'\big(x',f(x')\big)$. Alors d'une part $\dfrac{x + x'}{2} = a$, donc $x' = 2a - x$ et d'autre part $\dfrac{f(x) + f(x')}{2} = b$, *i.e.*

$$f(x) + f(2a - x) = 2b$$

- 9 : Comment montrer qu'une fonction est périodique ?

Il s'agit de trouver un réel T tel que pour tout réel x appartenant à l'ensemble de définition de f, alors

$$f(x+T) = f(x)$$

Il suffira alors d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0,T]$, puis de déduire le reste de la courbe par des translations successives de vecteur $k\overrightarrow{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Vous connaissez bien sûr la fonction sinus qui vérifie $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x et qui est donc 2π-périodique.

- 10 : Comment étudier le signe d'une expression ?

Vaste problème...Retenir malgré tout qu'en règle général, nous savons étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de polynômes du 1$^{\text{er}}$ ou du 2$^{\text{nd}}$ degré, d'exponentielles (qui sont toujours positives), de cosinus ou de sinus, de logarithmes népériens... Vous chercherez donc en général à factoriser ou à réduire au même dénominateur votre expression.

Si cela s'avère impossible algébriquement, on vous suggérera d'étudier une fonction. Alors soit elle admettra comme extremum zéro, soit vous déterminerez une approximation de la valeur d'annulation de f grâce au théorème de la bijection et vous conclurez à l'aide du tableau de variations.

*- 11 : Qu'est-ce qu'une fonction croissante sur **I** ?*

C'est une fonction qui conserve l'ordre sur I.

- 12 : Comment lever une indétermination ?

Il n'y a pas une méthode mais des méthodes. Il ne s'agit donc pas d'apprendre par cœur des recettes (tiens tiens...), ce qui vous induirait à écrire de grosses sottises.

Vous pouvez dans un premier temps repérer des termes « négligeables » devant d'autres et factoriser par le plus « fort » (c'est le cas par exemple des fonctions rationnelles au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$).

Vous pouvez minorer ou majorer par des valeurs permettant de conclure à l'aide des théorèmes de comparaison (c'est le cas de la fonction cosinus qui vérifie $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ pour tout réel x et donc $-1/x \leqslant (cosx)/x \leqslant 1/x$ pour $x \neq 0$ et finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} (\cos x)/x = 0$ par application du théorème des gendarmes.

Vous pouvez utiliser les propriétés algébriques de certaines fonctions pour retrouver des limites connues ($e^{-x} = 1/e^x$, $\ln(1/x) = -\ln x$, $x^2 + 1 = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}$...)

Dans le cas de l'étude de limites de fonctions irrationnelles, le recours à la quantité conjuguée peut s'avérer utile.

Dans les cas désespérés, vous pouvez essayer de reconnaître la limite d'un taux de variation et donc utiliser la dérivée associée.

*- 13 : Comment montrer qu'une fonction admet un extremum local en **a** ?*

Montrer que la dérivée s'annule en a en changeant de signe.

- 14 : Comment résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique ?

Dessinez un cercle trigonométrique ! N'oubliez pas les « $+2k\pi$ » et connaissez parfaitement les lignes trigonométriques de 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, π, 2π.

- 15 : Comment avoir 20/20 au Bac ?

Ce n'est pas difficile, je vais vous donner le secret :