# Révisions 2008

## ☙Sujet 1❧

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que $f$ et H sont bien définies sur $[1\ ;\ +\infty[$

b) Quelle relation existe-t-il entre H et $f$ ?

c) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre H(3).

**2.** On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre H(3).

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.

c) Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \leqslant \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$.

d) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$ puis de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

*Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.*

**Partie A**

On suppose connus les résultats suivants :

**1.** Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes $z_{\mathrm{A}}$, $z_{\mathrm{B}}$ et $z_{\mathrm{C}}$ trois points A, B et C.
Alors $\left|\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}\right| = \dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA}}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) \quad (2\pi)$.

**2.** Soit $z$ un nombre complexe et soit $\theta$ un réel :
$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où $k$ est un entier relatif.

*Démonstration de cours* : démontrer que la rotation $r$ d'angle $\alpha$ et de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z$ associe le point M$'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - \omega).$$

**Partie B**

Dans un repère orthonorrnal direct du plan complexe $\left(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_{\mathrm{D}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

**1.** a) Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes $z_{\mathrm{A}}$, $z_{\mathrm{B}}$, $z_{\mathrm{C}}$ et $z_{\mathrm{D}}$.

b) Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $\left(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ ?

c) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

**2.** On considère la rotation $r$ de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $\mathrm{E} = r(\mathrm{A})$ et $\mathrm{F} = r(\mathrm{C})$.

a) Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b) Donner l'écriture complexe de $r$.

c) Déterminer l'affixe du point E.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A**

On suppose connu le résultat suivant :

Une application $f$ du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si $f$ admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

*Démonstration de cours* : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A′ et B′ sont quatre points tels que A est distinct de B et A′ est distinct de B′, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

**Partie B**
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

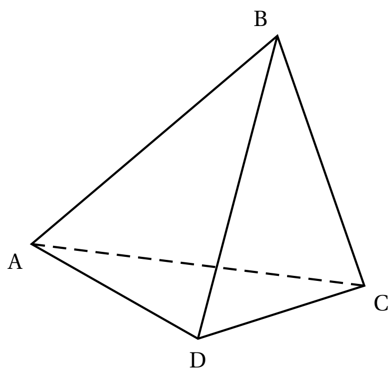
$$z_A = -\sqrt{3} - i,\ z_B = 1 - i\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + i \text{ et } z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

**1.** a) Donner le module et un argument-de chacun des quatre nomlres complexes $z_A$, $z_B$, $z_C$ et $z_D$.
b) Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
c) Déterminer le milieu du segment [AC], celui du segment [BD]. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

**2.** On considère la similitude directe $g$ dont l'écriture complexe est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$.
a) Déterminer les éléments caractéristiques de $g$.
b) Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par $g$ des points A, C et O.
c) Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

**EXERCICE 3** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

On considère un tétraèdre ABCD.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.




**1.** Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que AB = CD, BC = AD et AC = BD.
(On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).

**2.** a) Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.
b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

**3.** a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$ ? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).
c) Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].
d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?

**EXERCICE 4** **7 points**
**Commun à tous les candidats**
*On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.*

Les parties A et B sont indépendantes

**Partie A : un modèle discret**
Soit $u_n$ le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année $n$.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

**1.** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20-x).$$

a) Étudier les variations de $f$ sur $[0\,;20]$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,20]$, $f(x) \in [0\,;\,10]$.

c) On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormal.
Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

**2.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

**3.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

**Partie B : un modèle continu**

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année $x$.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et $g$ est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\text{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10-y)$$

**1.** On considère une fonction $y$ qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a) Montrer que $y$ est solution de (E) si et seulement si $z$ est solution de l'équation différentielle :

$$(\text{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b) Résoudre l'équation $(\text{E}_1)$ et en déduire les solutions de l'équation (E).

**2.** Montrer que $g$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+1}$.

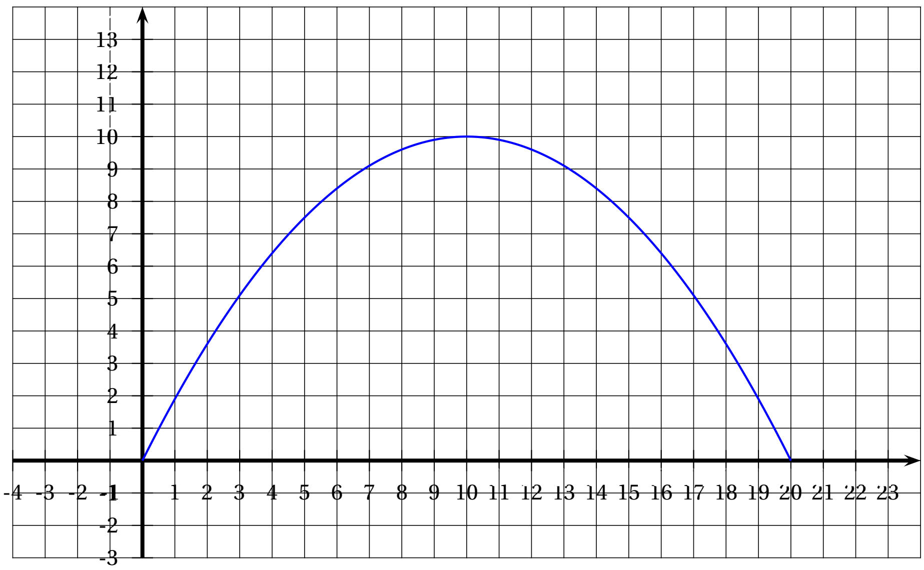
**3.** Étudier les variations de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**4.** Calculer la limite de $g$ en $+\infty$ et interpréter le résultat.

**5.** En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

**ANNEXE**

**À rendre avec la copie**




## Sujet 2

**Exercice 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;\,6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel $n$ la suite $(\text{U}_n)$ par

$$\begin{cases} \text{U}_0 & = & -3 \\ \text{U}_{n+1} & = & f(\text{U}_n) \end{cases}$$

**1.** La courbe représentative de la fonction $f$ est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0(U_0\ ;\ 0)$, $M_1(U_1\ ;\ 0)$, $M_2(U_2\ ;\ 0)$, $M_3(U_3\ ;\ 0)$ et $M_4(U_4\ ;\ 0)$.
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite $(U_n)$ ?

**2.** a) Démontrer que si $x < 3$ a alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.
En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel $n$.

b) Étudier le sens de variation de la suite $(U_n)$.

c) Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

**3.** On considère la suite $(V_n)$ définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel $n$.

a) Démontrer que la suite $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) Déterminer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.

c) Calculer la limite de la suite $(U_n)$.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**PARTIE A : Question de cours**
Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

**PARTIE B**
On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

**1.** a) Soit $N_1$ le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$$

Déterminer l'écriture de $N_1$ en base 10.

b) Soit $N_2$ le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de $N_2$ en base 12.

**Dans toute la suite**, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

**2.** a) Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si $N_2$ est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

**3.** a) Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si $N_1$ est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

**4.** Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de $x$ et de $y$ pour lesquelles N est divisible par 33.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**
Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % diviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

**1.** Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a) Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b) Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

**2.** Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

**3.** L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

L'espace est rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit $t$ un nombre réel. On donne le point $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et la droite $\mathscr{D}$ de système d'équations paramétriques :

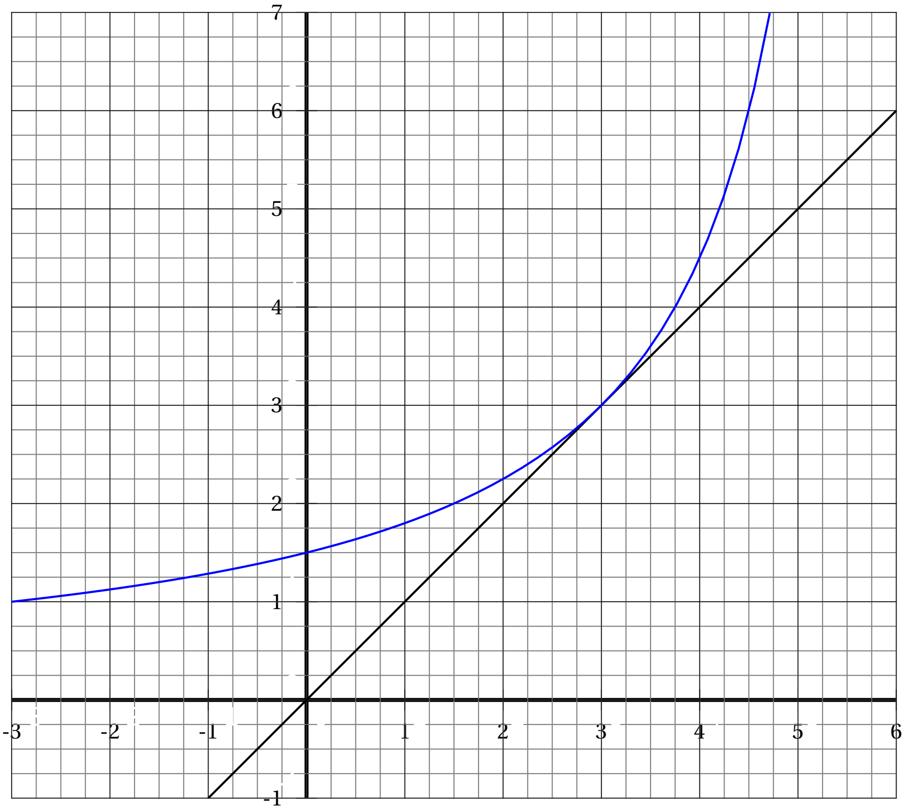
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9+4t \\ y & = & 6+t \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance $d$ entre le point A et la droite $\mathscr{D}$.

**1.** a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$, perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ et passant par A.
b) Vérifier que le point $B(-3\ ;\ 3\ ;\ -4)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.
c) Calculer la distance $d_B$ entre le point B et le plan $\mathscr{P}$.
d) Exprimer la distance $d$ en fonction de $d_B$ et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de $d$.

**2.** Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$. Exprimer $AM^2$ en fonction de $t$. Retrouver alors la valeur de $d$.

**ANNEXE (à rendre avec la copie)**




**Sujet 3**

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

*Une réponse exacte rapporte* $0,5$ *point ; une réponse inexacte enlève* $0,25$ *point ; l'absence de réponse est comptée* $0$ *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

**1.** Une solution de l'équation $2z+\overline{z}=9+\mathrm{i}$ est :

**a.** 3 **b.** i **c.** $3+\mathrm{i}$

**2.** Soit $z$ un nombre complexe ; $|z+\mathrm{i}|$ est égal à :

**a.** $|z|+1$ **b.** $|z-1|$ **c.** $|\mathrm{i}\overline{z}+1|$

**3.** Soit $z$ un nombre complexe non nul d'argument $\theta$. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

**a.** $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

**4.** Soit $n$ un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

**a.** $n=3$ **b.**$n=6k+3$, avec $k$ relatif **c.** $n=6k$ avec $k$ relatif

**5.** Soient A et B deux points d'affixe respective i et $-1$. l'ensemble des points M d'affixe $z$ vérifiant $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ est :

**a.** la droite (AB) **b.** le cercle de diamètre [AB] **c.** la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

**6.** Soit $\Omega$ le point d'affixe $1-\mathrm{i}$. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ vérifiant $|z-1+\mathrm{i}|=|3-4\mathrm{i}|$ a pour équation :

**a.** $y=-x+1$ **b.** $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ **c.** $z=1-\mathrm{i}+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta$ réel

**7.** Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

**a.** $1-4\mathrm{i}$ **b.** $-3\mathrm{i}$ **c.** $7+4\mathrm{i}$

**8.** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

**a.** $\{1-\mathrm{i}\}$ **b.** L'ensemble vide **c.** $\{1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$

**EXERCICE 2** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;
– $F_1$ l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;
– $F_2$ l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

**1.** a) Dessiner un arbre pondéré.

b) Calculer $p\,(\mathrm{D}\cap \mathrm{F}_1)$, puis démontrer que $p(\mathrm{D})=0{,}022\ 5$.

c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

*Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à* $10^{-3}$ *près.*

**2.** Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

**3.** La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre $\lambda$, avec $\lambda$ réel strictement positif.

a) Sachant que $p(\mathrm{X}>5)=0{,}325$, déterminer $\lambda$.
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda=0{,}225$.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

**EXERCICE 3** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A : question de cours**

**1.** Soit $f$ une fonction réelle définie sur $[a\ ;\ +\infty[$. Compléter la phrase suivante :
« On dit que $f$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$ si … »

**2.** Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $[a\ ;\ +\infty[$ et $\ell$ un nombre réel. Si $g$ et $h$ ont pour limite commune $\ell$ quand $x$ tend vers $+\infty$, et si pour tout $x$ assez grand $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, alors la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$ est égale à $\ell$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y=-x-1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. On a représenté sur la feuille annexe la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

**1.** Soit $a$ un nombre réel. Écrire, en fonction de $a$, une équation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point M d'abscisse $a$.

**2.** Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse $b$. Vérifier que $b - a = -1$.

**3.** En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

**Partie C**

**1.** Déterminer graphiquement le signe de $f$.

**2.** En déduire pour tout entier naturel non nul $n$ les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \frac{1}{n} \qquad (2) \quad \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}$$

**3.** En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

**4.** En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**5.** Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

**1.** a) Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon anlogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

**2.** L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c) Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49} ; \frac{18}{49} ; \frac{12}{49}\right)$.

**3.** a) Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b) Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1.** a) Quel est le reste de la division euclidienne de $6^{10}$ par 11 ? Justifier.

b) Quel est le reste de la division euclidienne de $6^4$ par 5 ? Justifier.

c) En déduire que $6^{40} \equiv 1\ [11]$ et que $6^{40} \equiv 1\ [5]$.

d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

**2.** Dans cette question $x$ et $y$ désignent des entiers relatifs.

a) Montrer que l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

b) Montrer que l'équation

$$(\mathrm{E}') \qquad 17x - 40y = 1$$

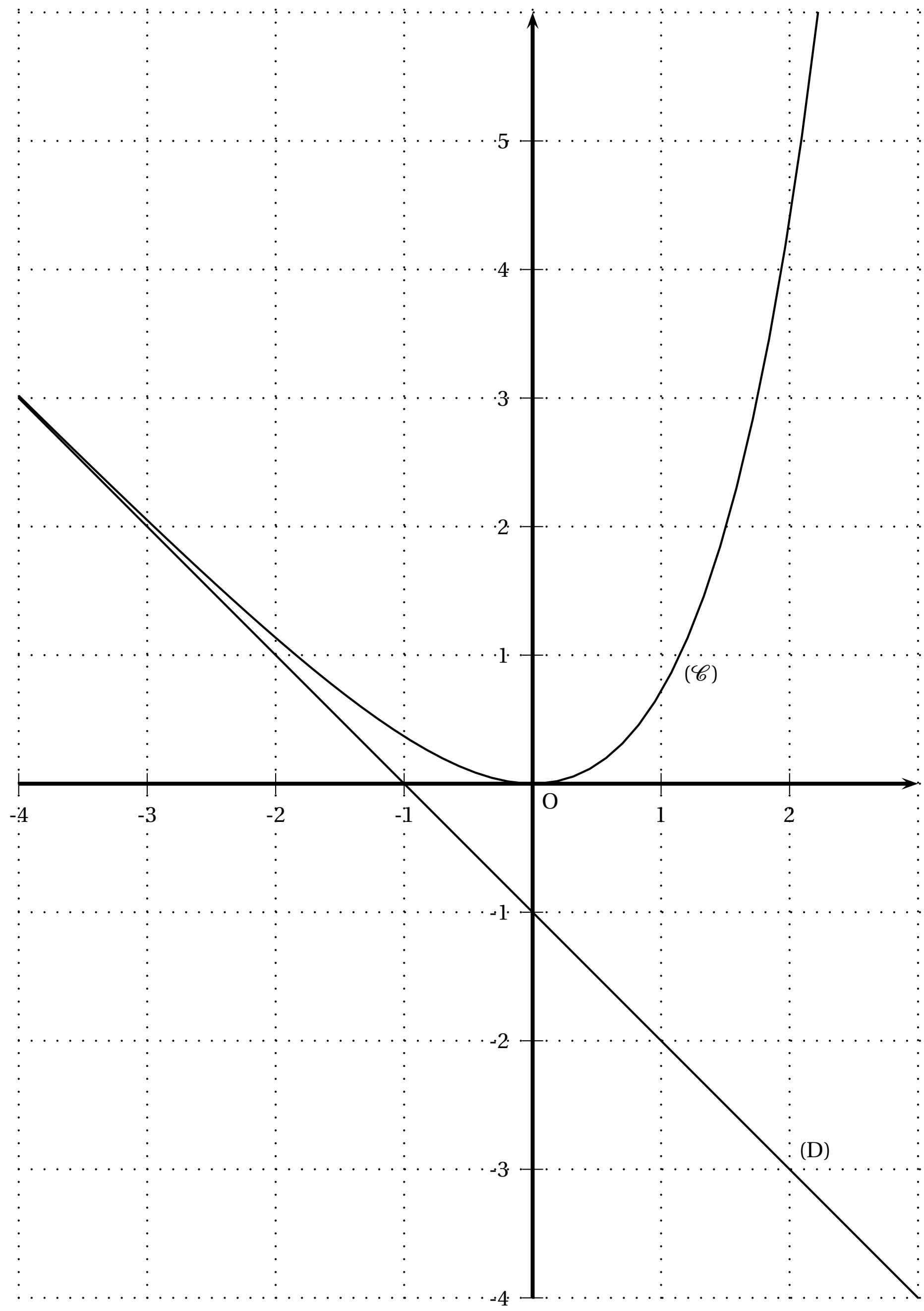
admet au moins une solution.

c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $(\mathrm{E}')$.

d) Résoudre l'équation $(\mathrm{E}')$.
En déduire qu'il existe un unique naturel $x_0$ inférieur à 40 tel que
$17x_0 \equiv 1 \quad [40]$.

**3.** Pour tout entier naturel $a$, démontrer que si $a^{17} \equiv b \quad [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 \quad [55]$, alors $b^{33} \equiv a \quad [55]$.

**ANNEXE (à rendre avec la copie)**



# Sujet 4

**EXERCICE 1** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

**1.** *Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.*

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction $\varphi$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit $a$ un réel donné.

a) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b) Soit $g$ une solution de l'équation $y' = ay$. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que $h$ est une fonction constante.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

**2.** On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a) Déterminer deux nombres réels $a$ et $b$ tels que la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$

soit une solution $f_0$ de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}_0)$ : $y' = 2y$.

c) Démontrer que $f$ est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de $(\mathrm{E}_0)$.

d) En déduire les solutions de (E).

e) Déterminer la solution $k$ de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
*On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.*

**1.** On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
Montrer que l'image M′ par S d'un point M d'affixe $z$ a pour affixe
$z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

**2.** On note H l'homothétie de centre A et de rapport $-2$. Donner l'écriture complexe de H.

**3.** On note $f$ la composée $\mathrm{H} \circ \mathrm{S}$.

a) Montrer que $f$ est une similitude.

b) Déterminer l'écriture complexe de $f$.

**4.** On appelle M″ l'image d'un point M par $f$.

a) Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}''} = -2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est la droite (AB).

b) Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}''} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
*On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.*
Soit $f$ l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle $z$ associe le point M′ d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

**1.** Soit E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E′, image de E par $f$

**2.** Déterminer l'ensemble des points M tels que M′ = M.

**3.** On note A et B les points d'affixes respectives 1 et $-1$.
Soit M un point distinct des points O, A et B.

a) Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ différent de 0, 1 et $-1$, on a :

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

b) En déduire une expression de $\frac{\text{M}'\text{B}}{\text{M}'\text{A}}$ en fonction de $\frac{\text{MB}}{\text{MA}}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{M}'\text{A}}, \overrightarrow{\text{M}'\text{B}}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}}\right)$

**4.** Soit $\Delta$ la médiatrice du segment [A, B]. Montrer que si M est un point de $\Delta$ distinct du point O, alors M′ est un point de $\Delta$.

**5.** Soit $\Gamma$ le cercle de diamètre [A, B].

a) Montrer que si le point M appartient à $\Gamma$ alors le point M′ appartient à la droite (AB).

b) Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par $f$ ?

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

**1.** On considère le point A de coordonnées $(-2\,;\,8\,;\,4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;\,5\,;\,-1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(d)$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

**2.** On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives
$x-y-z=7$ et $x-2z=11$.
Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée $(d')$.
Montrer que le vecteur de coordonnées $(2\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur directeur de $(d')$.

**3.** Démontrer que les droites $(d)$ et $(d')$ ne sont pas coplanaires.

**4.** On considère le point H de coordonnées $(-3\,;\,3\,;\,5)$ et le point H′ de coordonnées $(3\,;\,0\,;\,-4)$.

a) Vérifier que H appartient à $(d)$ et que H′ appartient à $(d')$.

b) Démontrer que la droite (HH′) est perpendiculaire aux droites $(d)$ et $(d')$.

c) Calculer la distance entre les droites $(d)$ et $(d')$, c'est-à-dire la distance HH′.

**5.** Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\text{MH}'}\cdot\overrightarrow{\text{HH}'}=126$.

**EXERCICE 4** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

**1.** On considère la fonction $f_1$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_1(x)=2x-2+\ln\left(x^2+1\right).$$

a) Déterminer la limite de $f_1$ en $+\infty$.

b) Déterminer la dérivée de $f_1$.

c) Dresser le tableau de variations de $f_1$.

**2.** Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n$, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x)=2x-2+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}.$$

a) Déterminer la limite de $f_n$ en $+\infty$.

b) Démontrer que la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

c) Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution $\alpha_n$ sur $[0\,;\,+\infty[$

d) Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $0<\alpha_n<1$.

**3.** Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right)>0$.

**4.** Étude de la suite $(\alpha_n)$

a) Montrer que la suite $(\alpha_n)$ est croissante.

b) En déduire qu'elle est convergente.

c) Utiliser l'expression $\alpha_n=1-\frac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

# Sujet 5

**Exercice 1 :** **6 points**

Démonstration de cours

**1.** Démontrer que : pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1$.

**2.** En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2.$$

**1.** Déterminer la limite de $g$ en $-\infty$ et la limite de $g$ en $+\infty$.

**2.** Étudier le sens de variation de $g$, puis dresser son tableau de variations.

**3.** On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée $\alpha$. Montrer que $-1{,}6 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}5$.

**4.** Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.

**Partie B : Étude de la fonction principale**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x.$$

**1.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ et la limite de $f$ en $+\infty$.

**2.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Étudier le sens de variation de $f$.

**3.** Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où $\alpha$ est défini dans la partie B.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}5$.)

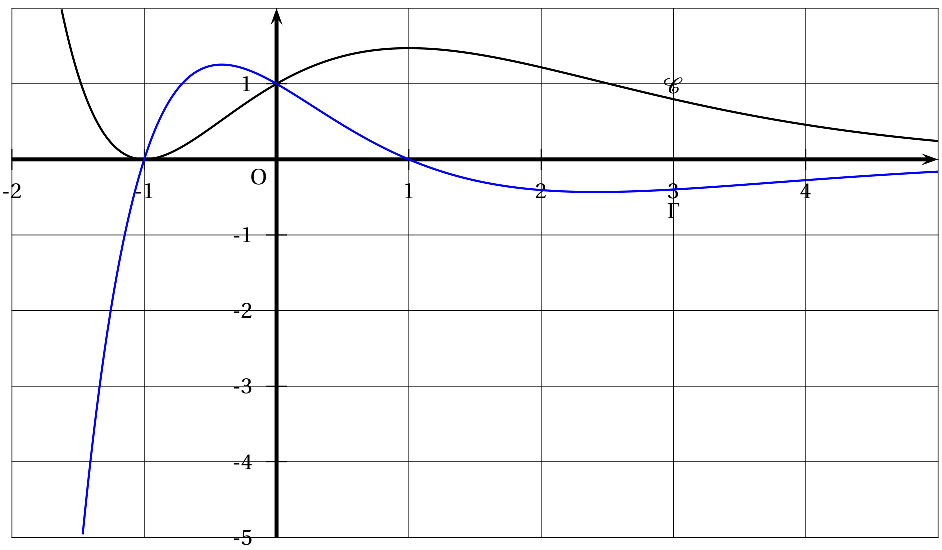
**4.** Établir le tableau de variations de $f$.

**5.** Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

**Exercice 2 :** **5 points**

À traiter par les élèves n'ayant pas choisi l'option mathématiques

**Partie A :** Lectures graphiques




On donne dans un repère orthogonal les courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma$ représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter $g$ et $g'$.

**1.** Associer à chacune des fonctions $g$ et $g'$ sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,5\right]$ le signe de $g'(x)$ et les variations de $g$.

**2.** Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ?

**Partie B**
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + y = 0$.
3. Soit $u$ une solution de (E$'$). Montrer que la fonction $f_0 + u$ est une solution de (E).
   On admettra que, réciproquement, toute solution $f$ de (E) est de la forme $f = f_0 + u$ où $u$ est une solution de (E$'$).
   En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$ lorsque $f$ est solution de (E).
4. Sachant que la fonction $g$ de la partie A est solution de (E), déterminer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer la solution $h$ de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

**Exercice 2 :** **5 points**
À traiter par les élèves ayant choisi l'option mathématiques
On considère deux entiers naturels, non nuls, $x$ et $y$ premiers entre eux.
On pose $\mathrm{S} = x + y$ et $\mathrm{P} = xy$.

1. a) Démontrer que $x$ et S sont premiers entre eux, de même que $y$ et S.
   b) En déduire que $\mathrm{S} = x + y$ et $\mathrm{P} = xy$ sont premiers entre eux.
   c) Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux $x$ et $y$ tels que : $\mathrm{SP} = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels $a$ et $b$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 84 \\ ab & = & d^3 \end{array}\right. \quad \text{avec } d = \mathrm{PGCD}(a\ ;\ b)$$

**Exercice 3 :** **4,5 points**
Commun à tous les élèves

**Partie A**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   Les solutions seront notées $z'$ et $z''$, $z'$ désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Donner la valeur exacte de $\left(z'\right)^{2007}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

**Partie B**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$ ; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O$'$ l'image du point O par la rotation $r_1$ de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B$'$ l'image du point B par la rotation $r_2$ de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
   Calculer les affixes des points O$'$ et B$'$ et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment [OB].
   a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO$'$B$'$ ?
   b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ est égale à $3\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   c) La conjecture émise à la question a est-elle vraie ?

**Exercice 4 :** **4,5 points**
Commun à tous les élèves
Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie. Il gratte une case sur le billet.
Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\dfrac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.
G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».
Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.

$L_1$ désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».
$L_2$ désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».
P désigne l'évènement « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\frac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\frac{1}{490}$.

**1.** a) Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
   b) Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.
   c) Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

**2.** En supposant le nombre de billets suffisamment grand pour que deux résultats soient considérés comme indépendants.
   a) Calculer la probabilité de ne rien gagner à ce jeu.
   b) Le joueur achète 10 billets, calculer la probabilité pour qu'un ticket au moins soit gagnant à ce jeu.
   c) En utilisant votre calculatrice, combien doit-il acheter de billets pour avoir une probabilité strictement supérieure à 0,5 de gagner ?

**3.** On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
   La probabilité de l'évènement « $X = 90$ » est $\frac{2}{125}$.
   La probabilité de l'évènement « $X = 190$ » est $\frac{2}{250}$.
   a) Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\frac{1}{10}$.
   b) Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.
   c) Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X.

## Examen de maturité 2007 – Suisse

*Lútilisation de la calculatrice est autorisée.*

### Exercice 1

Soit le nombre complexe $z = \alpha + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

**1.** Déterminer en fonction de $\alpha$ le module et l'argument de $z$ ainsi que de $z^n$, $n \geqslant 1$.

**2.** Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ la suite des nombres complexes $z$, $z^2$, $z^3$, ...,
   $z^n$, ..., représentés dans le plan de Gauss, se rapproche-elle de l'origine ? s'éloigne-t-elle de l'origine ? reste-t-elle à distance constante de l'origine ?

**3.** Déterminer la plus petite valeur de $\alpha$ strictement positive pour laquelle le nombre $z^6 \in \mathbb{R}$.

   *Pour la suite de cette première partie, on pose* $\alpha = \frac{1}{2}$.

**4.** Déterminer $n_0 \in \mathrm{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$, $z^n$ est situé à l'intérieur du disque centré à l'origine et de rayon $r = \frac{1}{100}$.

**5.** Calculer en fonction de $n$ le module de $z^{n+1} - z^n = z^n(z-1)$. Que représente géométriquement ce module ?

**6.** Démontrer que la suite des longueurs des segments $\left[z^n z^{n+1}\right]$ est une suite géométrique puis calculer la longueur de la ligne polygonale $\left[z z^2 z^3 ... z^n\right]$ lorsque $n$ tend vers infini.

### Exercice 2

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ possèdent les propriétés suivantes :

**1.** La fonction $f(x)$ est solution de l'équation différentielle $2xy' - 3y = 0$.

**2.** La fonction $g(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'' = 2$.

**3.** Les courbes représentatives des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ se coupent au point $\mathrm{I}(4\,;\,8)$.

**4.** La pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g$(x) au point I est égale à 10.
   Déterminer les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

### Exercice 3

On donne les quatre points A(-6 ; 1 ; 2), B(-3 ; 5 ; 5), C(-2 ; -2 ; 1) et

D(8 ; -1 ; 1) ainsi que la droite $a$ : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5+2t \\ y &=& -1+2t \\ z &=& 4-t \end{array}\right.$

On note $\pi$ le plan (ABC), K le cylindre d'axe $a$ et de rayon 3, et enfin $\alpha$ désigne le plan d'équation : $-x+2y+2z+8=0$.

**1.** Écrire l'équation cartésienne du plan π.

**2.** Calculer l'angle formé par la droite $a$ et le plan π.

**3.** Montrer que le point D appartient au cylindre K.

**4.** Déterminer l'équation de la sphère Σ tangente intérieurement au cylindre K en un cercle passant par le point D.

**5.** Montrer que le plan contient le point D et qu'il est tangent au cylindre K.

**6.** Calculer les coordonnées du point I qui est l'intersection de la génératrice du cylindre K passant par D et du plan π.

**7.** Écrire une représentation paramétrique de la droite $t$ contenue dans le plan π et tangente au cylindre K au point I.

**Exercice 4**

Une urne contient 10 boules noires et $n$ boules rouges. L'expérience $\mathscr{E}$ consiste à tirer simultanément 2 boules de l'urne. On note $p_1$ la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différente, $p_2$ la probabilité d'obtenir deux boules noires et $p_3$ la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

**1.** Montrer que la probabilité $p_1$ peut etre exprimée par $p_1 = \dfrac{20n}{n^2+19n+90}$.

**2.** Pour une mise de 5 francs, un joueur peut réaliser l'expérience E. Le joueur gagne 10 francs s'il obtient deux boules de couleur différente et ne gagne rien dans les autres cas.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

*Pour la suite du problème, on pose* $n = 5$.

**3.** Calculer les probabilités $p_1$, $p_2$ et $p_3$.

**4.** L'expérience $\mathscr{E}$ est réalisée 4 fois (on remet dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience). Calculer la probabilité des évènements suivants. A : « Obtenir exactement 3 fois deux boules noires. » B : « Obtenir exactement 2 fois deux boules noires et 1 fois deux boules rouges. » C : « Exactement 3 boules rouges ont été sorties de l'urne au cours des quatre expériences. » D : « Obtenir exactement une fois deux boules rouges sachant qu'exactement deux expériences ont donné deux boules de couleur différente. »

**5.** Combien de fois faut-il réaliser l'expérience $\mathscr{E}$ pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois deux boules de couleur différente soit supérieure à 0,99 ?

**6.** L'expérience $\mathscr{E}$ est réalisée 150 fois.
Calculer une valeur approximative de la probabilité d'obtenir entre 70 et 80 fois deux boules de couleur différente (bornes comprises) en justifiant votre méthode de calcul.

**Examen d'admission École polytechnique**

Faculté de Sciences Appliquées Université libre de Bruxelles

**1.** Résoudre dans IR l'équation

$$2^{4x+3} + 3\left(4^x\right) - 2^{-1} = 0.$$

**2.** a) Déterminer les valeurs réelles des paramètres $a$, $b$, $c$ pour que le polynôme $\mathrm{P}(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax + c$ soit divisible par $1 - x^2$.

b) Pour les valeurs des paramètres trouvées ci-dessus :

i) déterminer le quotient de la division du polynôme P par $1 - x$ ;

ii) factoriser P au maximum dans $\mathbb{R}$

iii) factoriser P au maximum dans $\mathbb{C}$ ; en déduire les racines complexes de ce polynôme et les représenter dans le plan de Gauss.

**3.** Soit la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{|x|}\mathrm{e}^{-x^2}$$

et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($\mathscr{C}$ est le graphe de $f$).

a) La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ? Justifier (utiliser la définition de la dérivée).

b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

d) Établir le tableau des variations de $f$, $f'$ et $f''$ contenant
– les racines de $f$, $f'$ et $f''$ ;
– les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ ;
– les extremums de $f$, les domaines de croissance et de décroissance de $f$ ;
– les points d'inflexion de $f$ et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de $f$

e) Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}$ d'après les résultats du d.

**4.** Soient $f$ et $g$ les fonctions de R dans R définies par

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{x}},\qquad g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

On note

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx,\quad J=\int_0^1 g(x)\,dx$$

a) Calculer $f(x)+g(x)$, en déduire $I+J$ (sans calculer I ni J).

b) Calculer J et en déduire I.

c) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ : $f(x)\leqslant g(x)$.

d) Calculer l'aire du domaine $D=\{(x\,;\,y)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant x\leqslant 1,\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$.

**5.** a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer

$$\int_0^n [x]\,dx$$

où $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.

b) Soit $t\in\mathbb{R}^+$. Calculer

$$\int_0^t [x]\,dx$$

**Indication :** $[t]\leqslant t<[t]+1$.

**6.** a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$8x^4-8x^2+1=0.$$

b) Résoudre l'équation $\cos 4z=0$.

c) Déduire de a. et b. la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$.

**Partie I**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y , on donne les points A(2 ; 0) et B(0 ; 1). Une droite mobile de coefficient angulaire $k$ coupe l'axe X au point P et l'axe Y au point Q.

a) déterminer une équation cartésienne du lieu géométrique du point M d'intersection des droites AQ et BP ;

b) discuter la nature de ce lieu géométrique en fonction de $k$ ;

c) construire ce lieu pour $k=-2$ (faire une figure en prenant comme unité 2 cm) ;

d) construire ce lieu pour $k=2$ (faire une figure en prenant comme unité 2 cm).

**7.** **Partie II** Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X, Y et Z, on donne le point P(0 ; 3 ; 4).

a) établir des équations cartésiennes de la droite $d$ parallèle à OX, passant par P ;

b) établir une équation cartésienne du plan contenant $d$ et l'axe OX ;

c) déterminer les coordonnées des sommets Q et R du carré OPQR, sachant que Q est sur $d$ et que son abscisse est positive ;

d) établir des équations paramétriques de la perpendiculaire $p$ au plan du carré passant par le centre de celui-ci ;

e) déterminer les coordonnées des points S et S′, sommets des pyramides droites dont le carré est la base et dont les hauteurs mesurent cinq unités de longueur ;

f) déterminer le cosinus de l'angle aigu des arêtes SO et SP, une équation cartésienne du plan OPS, la longueur de l'arête OS ainsi que le volume du polyèdre de sommets OPQRSS′.

**Partie III**

a) Déterminer le barycentre de deux points distincts A et B de masses respectives 2 et −1.

b) Déterminer le barycentre G de trois points non alignés, A, B, C, affectés de masses égales et le barycentre G′ de ces mêmes points affectés de masses respectives 1, 1 et −1.

c) Soit M un point quelconque du plan ABC.
Exprimer, en tenant compte des résultats du 2. les sommes vectorielles suivantes : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

d) Déterminer le lieu des points M tels que les sommes vectorielles considérées au 3. soient des vecteurs orthogonaux.