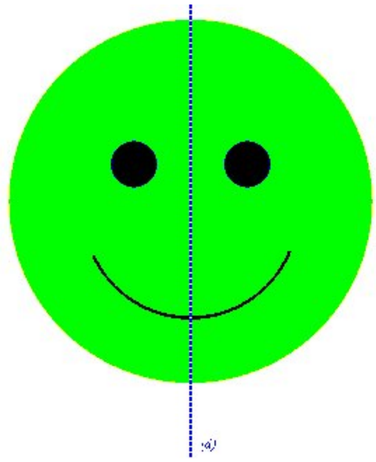
CHAPITRE 9

Triangles isométriques



I Une étrange application

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. On définit une application, que l'on appellera *machination* et qu'on notera μ, de la manière suivante : à tout point M différent de O, on assocoe le point M' tel que M' soit le symétrique de M par rapport à I_M, I_M étant le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[OM)$.
On dit que **M a pour image M' par la application μ** et on note

$$M \xmapsto{\mu} M'$$

1. Placez un point au hasard sur votre feuille et construisez son image par μ.
2. Pensez-vous que la application μ admette des points invariants[a]. Si oui, où sont-ils ? Essayez de le prouver.
3. Existe-t-il des points qui ont pour image O ? Si oui, où sont-ils ? Essayez de le prouver. Ce résultat n'est-il pas curieux ? Pourquoi ?
4. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de centre O, mais de rayon R différent de r. Essayez de deviner quelle peut être l'image de $\mathcal{C}'$ par μ. Prouvez-le. Est-ce bizarre ?
5. Soit d une droite ne passant pas par O. Construisez l'image de quelques points de d. Est-ce que l'image de d semble être une droite ?

   pour le prouver, nous allons appeler A et B les points d'intersection entre d et $\mathcal{C}$ et P un autre point de d. Démontrez que les *images* de A, B et P ne sont pas alignées.
6. Soit O'' un point tel que $OO'' = 1,75r$ et $\mathcal{C}''$ le cercle de centre O'' et de rayon $1,25r$.

   On désigne par A et B les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$; C et D sont les points d'intersection de $\mathcal{C}''$ et (OO'') ; E est le point d'intersection de $[OO'']$ et $\mathcal{C}$.

   Faites une belle figure. Démontrez que les images de A, B, C et D ne sont ni *alignées*, ni *cocycliques*[b].

Qu'est-ce qui est bizarre à propos de cette application ? Quelles propriétés vérifiées par les applications vues au collège ne sont plus vraies pour cette application ? Vous qui parlez couramment le grec ancien, expliquez pourquoi on appelle les applications que vous avez vues au collège des **isométries**.

II Figures « superposables »

Convenons de dire que deux figures sont superposables lorsqu'on peut les ... superposer !

a. Des figures ayant des segments de même longueur sont-elles superposables ?

– Construisez plusieurs triangles dont les côtés mesurent respectivement 4,5cm, 3cm et 2,5cm. Quels instruments utilisez-vous ? Les triangles obtenus sont-ils véritablement différents ?

a. Un point invariant est un point qui a pour image lui-même
b. Sur un même cercle

Connaissez-vous des applications mettant en correspondance ces triangles deux à deux ?
Si vous deviez décalquer l'un de ces triangles, pouvez-vous le mettre en coïncidence avec les autres ? Quelle manipulation faut-il faire en plus dans certains cas ?

– Construisez plusieurs parallèlogrammes[c] dont les côtés mesurent respec tivement 2cm et 3cm. Les # obtenus sont-ils superposables ? Pourquoi une étagère rectangulaire, formée de barres rigides est-elle « pliable » ? Que faire pour la « rigidifier » ?

b. Peut-on construire deux triangles superposables avec d'autres renseignements que la longueur des côtés ?

Soit ABC un triangle, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \text{mes}\left(\widehat{BAC}\right)$, $\beta = \text{mes}\left(\widehat{ABC}\right)$ et $\gamma = \text{mes}\left(\widehat{ACB}\right)$.

1. Peut-on toujours construire un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b et c, ces trois nombres étant quelconques ?
2. Peut-on toujours construire un triangle dont les mesures des angles sont α, β et γ, ces trois nombres étant quelconques ?
3. Dans chacun des cas proposés dans le tableau suivant, on connaît les valeurs marquées d'une croix. Conjecturez si les triangles obtenus semblent tous isométriques. Vous illustrerez vos réponses par des figures.

a	b	c	α	β	γ	Les triangles obtenus semblent-ils isométriques ?
X	X	X				
			X	X	X	
	X	X	X			
X			X		X	
X			X			
			X	X		
		X	X	X		
X	X					

c. Triangles isométriques et applications

1. Construisez un triangle, une droite Δ, un vecteur $\vec{u}$ et un point O. Construisez l'image du triangle par
   – la translation de $\vec{u}$
   – la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie d'une rotation de centre O et d'angle $\pi/4$.
   – la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie d'une symétrie d'axe Δ
   – la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie d'une symétrie d'axe Δ suivie d'une rotation de centre O et d'angle $\pi/4$.
2. Inversement, construisez plusieurs paires de triangles isométriques et conjecturez que l'on peut passer de l'un à l'autre à l'aide de transformations usuelles.

III Résumons la situation

Définition 1 : triangles isométriques

Deux triangles sont isométriques lorsque toutes les mesures de l'un (angles et longueurs) sont égales aux mesures correspondantes de l'autre, c'est-à-dire lorsque ces triangles sont superposables.

c. On notera # pour parallélogramme.

Propriété 1 :

SI deux triangles ont leurs côtés isométriques deux à deux, ALORS ils sont isométriques.

Propriété 2 :

SI deux triangles ont un angle isométrique et les côtés adjacents à cet angle deux à deux isométriques, ALORS ils sont isométriques.

Propriété 3 :

SI deux triangles ont un côté isométrique, et que les angles adjacents à ce côté sont deux à deux isométriques, ALORS ces triangles sont isométriques.

Propriété 4 :

SI le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par une translation, une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une rotation, ALORS ces deux triangles sont isométriques.

IV Passons à l'acte

a. Sachons reconnaître des triangles isométriques dans des configurations-clés

Reconnaissez des triangles isométriques dans les configurations suivantes et prouvez vos affirmations à l'aide des quatre propriétés du cours :

1. ABCD est un parallélogramme de centre O ;
2. ABC est un triangle isocèle de sommet principal A et I est le milieu de [BC] ;
3. ABC est un triangle équilatéral, I,J et K sont les milieux des côtés et G est le centre de gravité de ABC ;
4. ABC est un triangle quelconque et I, J et K sont les milieux des côtés.

b. Un critère spécial triangle rectangle

Construisez un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse BC mesure 4cm et tel que $\operatorname{mes}\left(\widehat{ABC}\right) = \pi/5$. Tous les triangles rectangles ayant ces deux mêmes caractéristiques sont-ils isométriques ? Prouvez-le !

c. Deux triangles isométriques ont-ils la même aire ? Deux triangles ayant la même aire sont-ils isométriques ?

Répondez à la première question.
Pour la deuxième, considérez un triagne ABC quelconque et le milieu M de [BC].

1. AMB et AMC sont-ils isométriques ?

2. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Comparez les aires de AMB et AMC.
3. Répondes à la deuxième question posée au début du paragraphe.

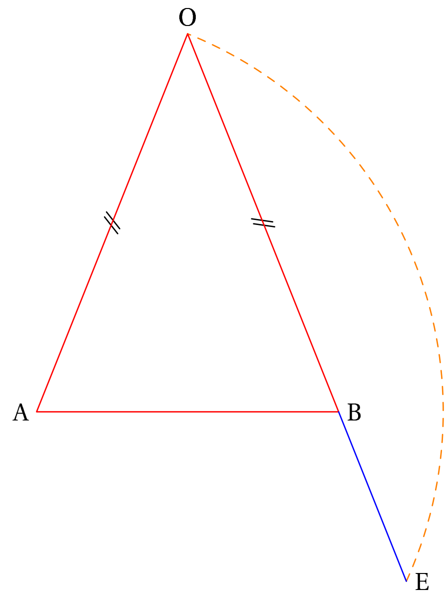
d. Avec des rotations

Soit ABC un triangle quelconque. On construit 3 triangles équilatéraux à l'extérieur de ABC de côtés respectifs [AB], [BC] et [AC].

1. Montrez que BCD et FCA sont deux triangles isométriques (relisez le titre de l'exercice...)
2. Montrez de même que EBC et ABF sont isométriques.
3. Déduisez-en que $AF = BD = CE$.

e. Des triangles isométriques pour calculer des mesures d'angles

Sur la figure suivante



tracez deux points D et C appartenant respectivement à [OA] et [BE] tels que $OD = EC$.

1. Quelle est la nature du triangle AOE ?
2. Comparer AEC et BOD.
3. Comparer les distances AC et BD.
4. Comparer $\text{mes}\left(\widehat{ACB}\right)$ et $\text{mes}\left(\widehat{ADB}\right)$.

Chapitre 10

Sangaku

算額

V Qu'est-ce que c'est ?

Les sangakus ou plutôt 算額 sont littéralement des *tablettes de mathématiques* que l'on trouve sous les auvents des temples japonais et qui représentent des compositions plus ou moins sophistiquées de figures géométriques simples imbriquées. Les premiers sangakus font leur apparition au XVII^{e} siècle au Japon et sont des sortes de défis que se lancent les mathématiciens de l'époque qui étaient plutôt des sortes de samouraïïs se livrant combat avec pour seule arme leur talent mathématique.
Voici une des plus belles tablettes mesurant 4 mètres 50 de large suspendue au sanctuaire de Haguro en 1823

Figure 1 – Sangaku du sanctuaire de Haguro (1823)

Le premier exemple que nous traiterons sera de calculer la distance AB en fonction des rayons des deux cercles :

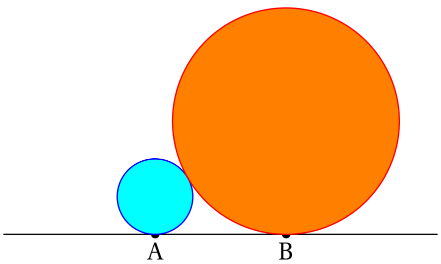
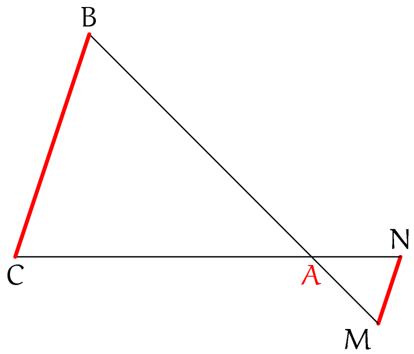


Figure 2 – Wasan

VI Outils mathématiques

a. Les classiques

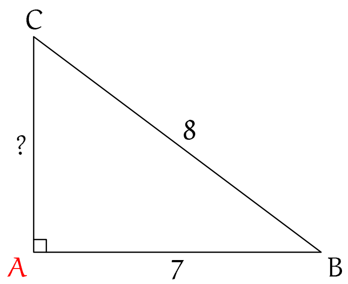
Nous ne nous étendrons pas sur les théorèmes de THALÈS



M est sur (AB)
N est sur (AC)
$(MM) \mathbin{/\!\!/} (BC)$
D'après le théorème de Thalès,
$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

FIGURE 3 – Théorème de Thalès

et PYTHAGORE



Dans le triangle ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore,
$BA^2 + AC^2 = BC^2$

$(7)^2 + AC^2 = (8)^2$
$49 + AC^2 = 64$
$AC^2 = 64 - 49$
$AC^2 = 15$
$AC = \sqrt{15}$
$AC = \sqrt{15}$
$AC \approx 3.872983$

FIGURE 4 – Théorème de Pythagore

que vous connaissez tous et que nous utiliserons très souvent.

b. Rayon du cercle inscrit

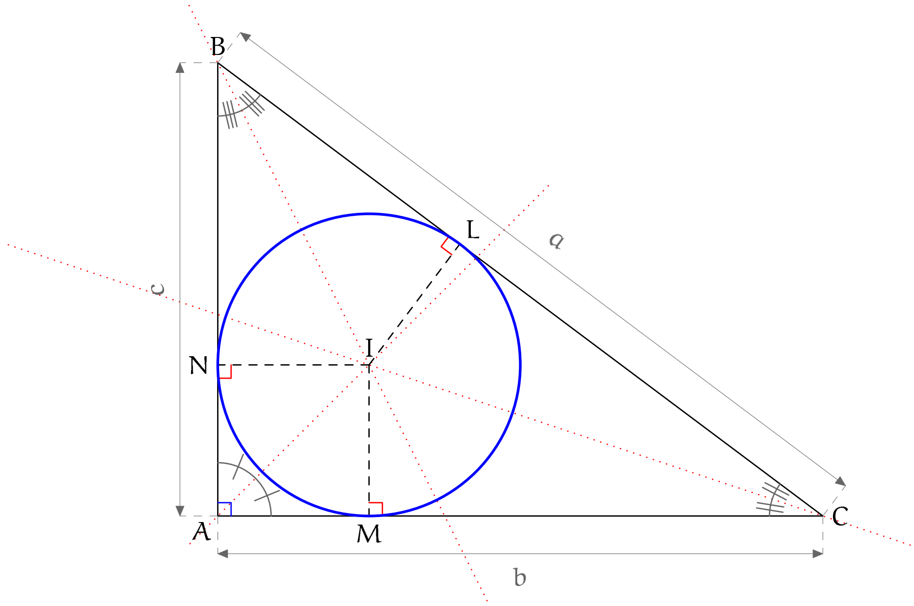


FIGURE 5 – Cercle inscrit dans un triangle rectangle

Que pensez-vous des distances CL et CM ? BN et BL ?

On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et r le rayon du cercle inscrit. Calculez a en fonction de b, c et r.

Déduisez-en que :

Théorème 1 : rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle

$$r = \frac{b+c-a}{2}$$

VII Premier Sangaku : Wasan

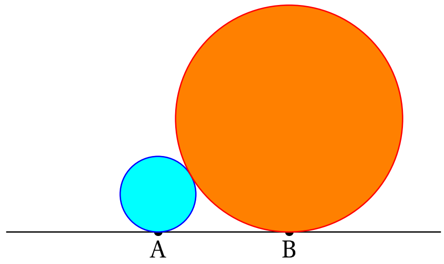


FIGURE 6 – Wasan

Le problème est de montrer que $AB^2 = 4rR$ en notant r le rayon du petit cercle et R le rayon du grand cercle.

VIII Deuxième Sangaku : les trois cercles

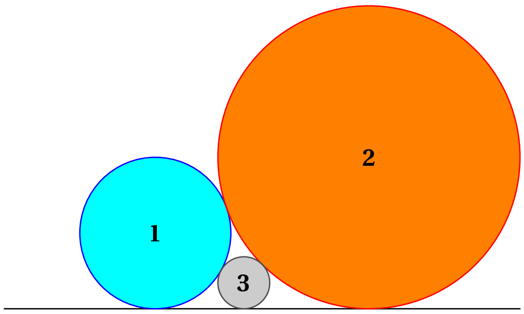


FIGURE 7 – les trois cercles

Montrez que $\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}}$

IX Troisième Sangaku : les trois cercles entre deux baguettes

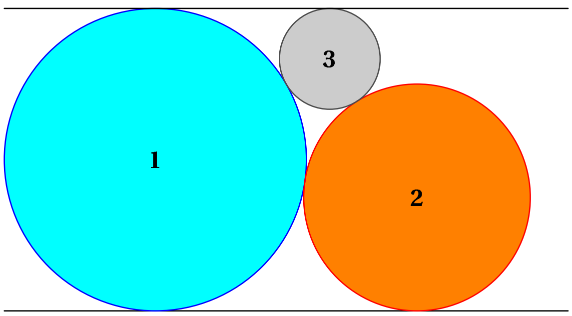


FIGURE 8 – les trois cercles entre deux baguettes

Montrez que $r_1^2 = 4r_2r_3$

Pour les passionnés, procurez-vous *Sangaku* de Géry HUVENT paru en 2008 chez DUNOD.