Systèmes de 2 équations linéaires à 2 inconnues en $2^{nde}12$

I Résolutions

Exercice 1

Pour chacun des systèmes suivants, indiquez le nombre de solutions :

1. $\begin{cases} 2x+3y = 7 \\ x-y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-6y = 2 \\ 6x-9y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2y-5 \\ 3y = 7x-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2 = 5 \\ 3x+4y = 7 \end{cases}$

Exercice 2

On considère le système suivant : $\begin{cases} 4x-3y = 6 \\ x+5y = 13 \end{cases}$

1. Vérifiez que le couple $(3;2)$ est une solution du système.

2. Est-ce la seule ? Si non, en donnez une autre.

Exercice 3

On considère le système suivant : $\begin{cases} (a+1)x+(3a+2)y = 4 \\ 2ax-6ay = 5 \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a, le système a-t-il une unique solution ?
2. Donner pour les autres cas, le nombre de solutions.

Exercice 4

Résoudre chacun des systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 8x+4y = -3 \\ 6x+3y = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+2y = 130 \\ 3x+4y = 135 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4s-3t = 32 \\ -s+3t = 19 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \alpha+\beta = 40 \\ 5\alpha+3\beta = 180 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -10x+4y = -74 \\ 3x+2y = 19 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+4y = 3 \\ x+2y = -4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} d+c = 28 \\ d+2c = 45 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-4y = -6 \\ -3x+6y = 9 \end{cases}$

Exercice 5

Résolvez chacun des systèmes suivants après les avoir remis sous forme "classique"

1. $\begin{cases} x+1 &= 2(y-1) \\ x-1 &= y+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} d+3 &= u \\ 10d+u+27 &= 10u+d \end{cases}$

3. $\begin{cases} g-p &= 75 \\ g &= 4p+21 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{a+3}{b+3} &= \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{a-3}{b-3} &= \dfrac{1}{7} \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2\Big(y-(x-y)\Big) &= x \\ x+(x+x-y) &= 90 \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x+1)(y+2) &= xy-4 \\ (x+1)^2+(y-3)^2 &= x^2+y^2 \end{cases}$

Exercice 6

On considère le système : § $\begin{cases} 6x-12y &= -18 \\ -15x+30y &= 45 \end{cases}$.
On souhaite obtenir trois couples de solutions différentes à ce système.

1. Justifiez que le souhait est réalisable.

2. Réalisez-le.

II Résolution graphique

Exercice 7

On considère le système : § $\begin{cases} -2x+y &= -1 \\ -5x+y &= 2 \end{cases}$.

1. Justifiez le nombre de solutions du système.
2. Donnez les équations réduites des droites associées à ce système.
3. A l'aide de la calculatrice graphique, tracez les droites et déduisez-en une approximation de la solution.
4. Vérifiez par le calcul que le couple obtenu est bien la solution exacte du système.

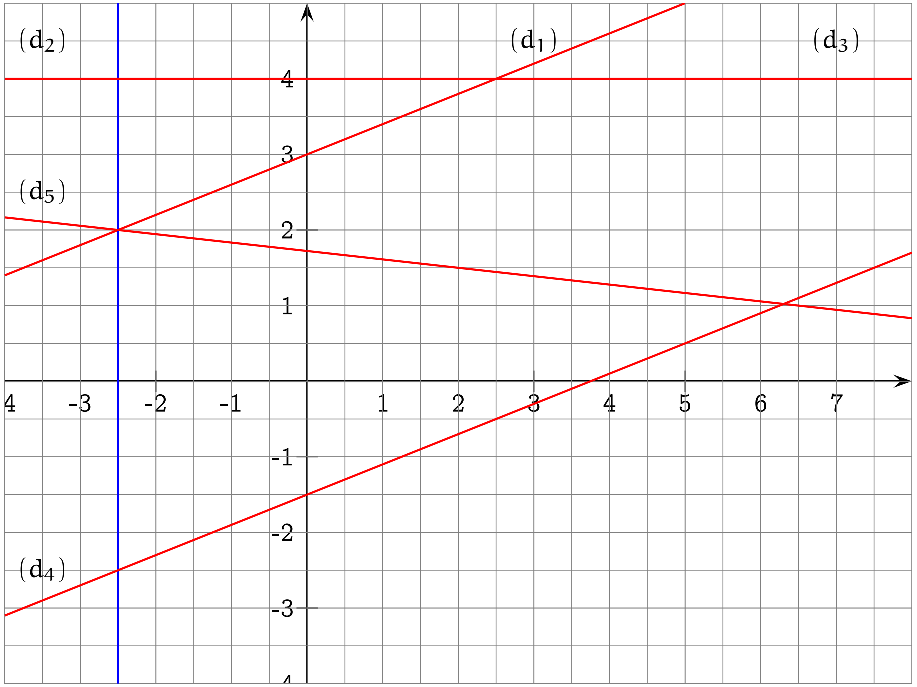
Exercice 8

On se place dans un repère $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité 1 cm ou 1 carreau.

1. Tracer les droites d'équations $2x-4y=1$ et $x+6y=-3$
2. En déduire une approximation des solutions du système $\begin{cases} 2x-4y &= 1 \\ x+6y &= -3 \end{cases}$
3. Vérifier ces solutions, et si elles ne sont pas exactes, retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 9

Déterminer une équation de chacune des droites tracées ci-dessous, puis en déduire la résolution graphique de chacun des systèmes donnés.



1. $\begin{cases} y = \dfrac{2}{5}x + 3 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - 10y = 15 \\ 2x + 18y = 31 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 4 \\ 2x + 5 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{3}{2} \\ 2x - 5y = -15 \end{cases}$

III Équations cartésiennes d'autre figures

Exercice 10

Dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère l'équation $x^2 + y^2 = 4$. Cette équation caractérise une figure géométrique que l'on ne connait pas.

1. Est-ce l'équation d'une droite ? Pourquoi ?

2. a) Déterminer les valeurs possibles de x lorsque $y = 0$.

b) Déterminer les valeurs possibles de y lorsque $x = 0$.

c) En déduire quatre points situés sur Γ et placer les sur un graphique.

d) Que pensez-vous de la forme de Γ ?

Soit A et B les points de coordonnées respectives $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.

3. Calculer la longueur AB.

4. Soit C le point de Γ de coordonnées positives et tel que $x_C = 1$.

a) Calculer l'ordonnée y_C de C.

b) Calculer les longueurs AC et BC.

c) Prouver que ABC est un triangle rectangle en C.

5. Soit D le point de Γ de coordonnées négatives et tel que $x_D = -\sqrt{2}$.

a) Calculer l'ordonnée y_D de D.

b) Calculer les longueurs AD et BD.

c) Prouver que ABD est un triangle rectangle en D.

6. Soit M un point de Γ d'abscisse x inconnue et d'ordonnée y positive.

a) Ecrire l'ordonnée y de M en fonction de x.

b) Calculer les longueurs AM and BM, en fonction de x.

c) Prouver que ABM est un triangle rectangle en M.

7. Que peut-on en déduire pour Γ ?

IV Différentes équations pour une même droite

Toute droite admet une infinité d'équation cartésienne, toutes équivalentes mais parfois vraiment différentes dans leur apparence (et dans les informations directes qu'elles fournissent). Dans ce module, nous allons voir les principaux types d'équation. Seulement deux sont généralement utilisés mais les autres sont aussi très intéressantes.
On distingue :

- la forme **generale** : $ax+by+c=0$, où a, b et c sont trois réels. Toute droite admet une équation de cette forme ... et même plusieurs puisque l'on peut multiplier par n'importe quel nombre non nul.
- la forme **pente-ordonnée** à l'origine : $y = mx + p$, où m et p sont des nombres. m est la pente et p l'ordonnée à l'origine. Cette forme est unique pour toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
- la forme **point-pente** : $y - y_0 = m(x - x_0)$, où m est un réel, la pente, et (x_0, y_0) est un couple de nombre réel, les coordonnées d'un point de la droite. cette forme n'est pas unique puisque tout point de la droite peut-être utilisé.
- la forme **intersection** : $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, où p et q sont des réels non nuls, respectivement l'abscisse de l'intersection avec (Ox) et l'ordonnée de l'intersection avec (Oy).

Il est assez facile de passer d'une forme à l'autre comme le montre l'exemple suivant.

$$\begin{aligned}
4x + 2y - 6 &= 0 \text{ \textit{(forme générale)}} \\
2y &= -4x + 6 \\
y &= -2x + 3 \text{ \textit{(pente -ordonnée)}} \\
y &= -2(x-1) + 1 \\
y - 1 &= -2(x-1) \text{ \textit{(point-pente)}} \\
2x + y &= 3 \\
\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} &= 1 \\
\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{3} &= 1 \text{ \textit{(intersection)}}
\end{aligned}$$

Exercice 11

Huit équations de droites sont données ci-dessous.

- $d_1 : 3x - 3y + 3 = 0$;
- $d_2 : y = -5x + 7$;
- $d_3 : y - 2 = -6(x - \frac{1}{3})$;
- $d_4 : \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$;
- $d_5 : -2x + 5y + 1 = 0$;
- $d_6 : y = 6x - 11$;
- $d_7 : y + 1 = 2(x + 5)$;
- $d_8 : \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$.

1. Reconnaître la forme de chaque équation.
2. Tracer chaque droite à partir de l'équation donnée. Quelle est la forme la plus facile à tracer ?
3. Pour chacune des droites précédentes, utiliser l'équation donnée pour trouver les coordonées de deux points de cette droite. Pour quelle forme est-ce le plus facile ?
4. Pour chacune des équations, donner les trois autres formes d'équation.
5. En déduire, pour chaque droite, la pente et les coordonnées des intersections avec chacun des axes.

V Mise en équation de problèmes

Le but de ce module est de mettre en équation des problèmes. On ne demande pas de résoudre les sytèmes obtenus puisqu'ils ont déjà été résolus lors de précédent exercices. Pour chaque situation, on veillera à bien préciser les inconnues choisies.

Exercice 12

Mettre chacun de ces problèmes en équation. On ne demande pas de résoudre les systèmes obtenus.

1. Quatre DVD et deux CD coûtent 130 €. Trois DVD et quatre CD coûtent 135 €. Quel est le prix d'un DVD ? d'un CD ?
2. Simon a 40 livres. Les uns ont une épaisseur de 5 cm, les autres ont une épaisseur de 3 cm. S'il les range tous sur un même rayon, ils occupent 1,80 m.
   Combien Simon a t-il de livre de chaque sorte ?

3. Dans un troupeau de chameaux et de dromadaires, on compte 28 têtes et 45 bosses. Combien y a-t-il de dromadaires ? (une bosse)

4. Trouver une fraction telle que , si l'on ajoute 3 à son numérateur et à son dénominateur, on trouve $\frac{2}{5}$ mais si l'on retranche 3 à son numérateur et à son dénominateur, on trouve $\frac{1}{7}$.

5. Trouver deux nombres, sachant que la différence du plus grand et du plus petit est 75 et que si l'on divise la plus grand par le plus petit, le quotient est 4 et le reste est 21.

6. Dans un nombre de deux chiffres, le chiffre des dizaines est inférieur de 3 à celui des unités. Si on inverse les deux chiffres, on obtient un nombre qui dépasse de 27 le premier.
Donner toutes les solutions possibles.

7. Un cheval et un mulet, portant tout les deux de lourds sacs, marchaient côte à côte. Le cheval se plaignant du poids excessifs de son fardeau, le mulet lui répondit : " Si je te prends un sac, ma charge sera deux fois plus lourde que la tienne, mais si tu me prends un sac, ton fardeau sera égal au mien ".
Dites, mathématicien éclairés, combien de sacs portait le cheval et combien de sac portait le mulet.

8. J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera de 90 ans.
Peut-on connaître l'âge du narrateur ? Si oui, quel est cet âge ?

VI Changement de variables

Exercice 13

On considère le système :

$$\S \begin{cases} 4\sqrt{x} - \sqrt{y} & = & 2 \\ -3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} & = & 10 \end{cases}$$

1. Le système peut-il être qualifié de linéaire ? Expliquer.

2. Réecrire le sytème en posant $U = \sqrt{x}$ et $V = \sqrt{y}$.

On dit que l'on a effectué un **changement de variable**. Le but de cette manipulation était de transformer le sytème initial (non linéaire) en un système linéaire que l'on sait résoudre. Une telle manipulation (qui est bien pratique) n'est malheureusement pas toujours possible... Cela dépend évidemment de la "forme" du système.

3. Résoudre le système obtenu.

4. En déduire les solutions du système initial.

Exercice 14

Résoudre chacun des systemes suivants après avoir effectué un changement de variables :

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} + 3\dfrac{y-3}{4} & = & 7 \\ \\ 3\dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y-3}{4} & = & 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 & = & -2 \\ -2x^2 + 4y^2 & = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x-3)^2 - \frac{2}{y-1} & = & -5 \\ 7(x-3)^2 + \frac{4}{y-1} & = & 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 & = & 35 \\ 3x^2 + 2y^2 & = & 30 \end{cases}$$